LÖSNING TILL TENTAN I LINJÄR ALG II, FÖR D1 OCH F1

MÅND 10 JAN 05

① $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 2 & 1-a & 1+a & 3 \\ 4 & -a & 3 & 3+a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}\right) \quad *$

Determinanten är $2(1-a-a^2+a) = 2(1-a)(1+a)$

$\Rightarrow$ om $a^2 \neq 1$ har syst. unik lösning

om $a=-1$ är $* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ så ingen lösning exist.

om $a=1$ får vi: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ som har ∞ antal lösn.

② om $n=1$ är påst. riktigt så antas det gäller för n. Då har vi

$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \{\text{ind. ant}\} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}+n^2+2n+1$ och

$\frac{(n+1)^3}{3}+\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{(n+1)}{6} = \frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n+1)+\frac{1}{2}(n^2+2n+1)+\frac{1}{6}(n+1)$

$= \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}+(n^2+n+\frac{1}{3}+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}+n^2+2n+1 \quad \cancel{X}$

③ Prövning ger att $z=-1$ är nollställe. Vidare är $p'(z)=4z^3+12z^2+20z+12$ och $p'(-1)=0$ varför $z=-1$ är dubbelrot. Således har vi

$z^4+4z^3+10z^2+12z+5 = (z^2+2z+1)(z^2+az+5)$

koeff framför z^1 : $12=10+a \Rightarrow a=2$ och

$z^2+2z+5 = (z+1)^2-1+5 = (z+1)^2+2^2 = (z+1+2i)(z+1-2i)$

$\therefore$ Nollställen är $\{-1,-1,-1+2i,-1-2i\}$

④ $\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 4 \\ -12 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)$

a) vi ser att $Au_i=\lambda_i u_i$ om $\lambda_1=1$, $u_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=-1$, $u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Således har vi

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A^{2005} = PD^{2005}P^{-1} = PDP^{-1} = A$

c) Nej, dess (unika, så när som på skala) egenvektorer är inte ortogonala.

(5) Minsta kvadratlösning till det givna systemet fås av

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dvs $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ som ger

$x = \frac{-20}{19}$ och $y = \frac{11}{19}$

(6) En enhets normal till H är $\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, varför matrisen för S i stand. bas ges av

$$I - 2\hat{N}\hat{N}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) Låt $b_1 = (1,2)$ och $b_2 = (2,1)$. Då har vi:

$Tb_1 = 1\cdot b_1 + 3\cdot b_2 = (7,5)$ och $Tb_2 = 2b_1 + 4b_2 = (10,8)$

$\Rightarrow T(b_2 - b_1) = T(1,-1) = (3,3)$ som ger

$x = (x_1, x_2) = (1/3, -1/3)$

(8) $(I-A)(I+A+\dots+A^9) = (I+A+\dots+A^9) - (A+A^2+\dots+A^9+A^{10}) = I$

(9) Låt $p(t) = a + bt + ct^2$, $p(-1) = a - b + c$

$p(0) = a$ och $p(1) = a + b + c$

$\langle 1, p\rangle = 3a + 2c = 0$ & $\langle t, p\rangle = 2b = 0$ ger

t.ex $p(t) = 2 - 3t^2$.

(10) Då A är symmetrisk så existerar ON-bas $u_1, \dots, u_n$ i $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A.

Då alla egenv. är $= 1$ har vi att $Au_i = u_i \ \forall i$

$\Rightarrow A =$ identitetsavbildningen.