Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin, Lars Svensson

5B1109, Linjär Algebra II för D1 och F1
Tentamen, måndagen den 10 jan 2005 kl 08.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 16 poäng ger betyget tre, 21 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

Bonuspoäng: maximalt får fyra bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar och inlämningsuppgifter höstterminen 2004.

(3p) **1.** Bestäm för varje reellt a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x & -ay & +z & = 1 \\ 2x & +(1-a)y & +(1+a)z & = 3 \\ 4x & -ay & +3z & = 3+a \end{cases}$$

(3p) **2.** Visa med hjälp av induktion att

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad \text{om } n \geq 1.$$

(3p) **3.** Polynomet $p(z) = z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5$ har ett dubbelnollställe som är ett heltal. Finn alla rötterna till polynomet.

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}.$$

(2p) (a) Bestäm en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

(1p) (b) Beräkna A^{2005}.

(1p) (c) Kan matrisen A diagonaliseras ortogonalt?

(4p) **5.** Bestäm i minstakvadratmening en “lösning” till det överbestämda systemet

$$\begin{cases} x & +y & = -1 \\ x & +3y & = 1 \\ -x & +2y & = 2 \end{cases}$$

VÄND!

(4p) **6.** Bestäm en matrisrepresentation, i standardbasen, för speglingen S i planet

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

(4p) **7.** En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ har i basen $\{(1,2)\,;(2,1)\}$ matrisrepesentationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finn $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ sådan att $T\mathbf{x} = (1,1)$.

(3p) **8.** Låt A vara en kvadratisk matris sådan att $A^{10} = 0$. Verifiera att matrisen

$$I + A + A^2 + \cdots + A^9$$

är invers till $I - A$.

(4p) **9.** I vektorrummet P_2 av reella polynom i en variabel av grad högst 2 definieras inre produkten $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ genom

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Ange något nollskilt polynom som är ortogonalt mot både 1 och t.

(3p) **10.** En symmetrisk matris A har alla egenvärdena lika med ett. Visa att A är enhetsmatrisen I.