Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för D1 den 5 december 2005 klockan 14.00-19.00.

Examinator: Roy Skjelnes

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 24 poäng ger betyget fyra och 32 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2005.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm en ekvation för det plan i R^3 som innehåller punkten $(1, 0, 2)$ och som ligger vinkelrätt mot vektorn $(1, 1, 3)$. Avgör också om punkten $(3, 1, 1)$ tillhör detta plan.

   Svar. En ekvation för planet ges av formeln $n \cdot (X - P) = 0$, där normalen $n = (1, 1, 3)$ och punkten $P = (1, 0, 2)$. Detta ger ekvationen

   $$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 3(z - 2) = x + y + 3z - 7 = 0.$$

   Vidare har vi att punkten $(3, 1, 1)$ ligger i planet då $3 + 1 + 3 \cdot 1 - 7 = 0$.

2. (3p) Visa att vektorerna $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$ och $(0, -1, 1)$ bildar en bas för R^3.

   Svar. Vektorerna bildar en bas för R^3 om och endast om deras determinant är nollskilld. Vi har att

   $$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (1 + 1) - 2 \cdot (1 + 2) = -4.$$

3. (3p) Bestäm de värden på det reella talet a för vilka nedanstående ekvationssytem har en unik lösning. (**Anm.** Lösningen behöver ej bestämmas.)

   $$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 4x_2 & - & ax_3 & = & a. \end{cases}$$

   Svar. Ekvationssystemet skriver vi som matrisekvationen $AX = B$, där

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & -4 & -a \end{bmatrix},$$

   och $X^T = [x_1\, x_2\, x_3]$ och $B^T = [0\ 1\ a]$. Ekvationen har en unik lösning om och endast om determinanten till A är nollskilld. Determinanten

   $$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & -6 & -a+3 \end{bmatrix}$$

beräknar vi att vara $(a-2)(-a+3)+6 = -a^2+5a = -a(a-5)$. Determinanten har nollställen $a=0$ och $a=5$. För alla andra värden på a har ekvationssystemet en unik lösning.

4. (3p) Låt A beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ sådan att matrisen $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}$ blir en diagonalmatris.

Svar. Det karakteristiska polynomet till matrisen A i uppgiften är

$$c_A(\lambda) = (\lambda-2)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3).$$

Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 1$ blir nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix}.$$

Dvs. det linjära höljet till vektoren $(1,-1)$. Då matrisen är symmetrisk följer det att egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 3$ spänns upp av vektoren $(1,1)$. Båda vektorerna har längd $\sqrt{2}$, och det följer att den ortogonala matrisen

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliserar matrisen A.

5. (3p) Är lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & = & 0 \\ x & - & y & = & 1 \end{cases}$$

ett delrum till R^2.

Svar. Nej, systemet är ej homogent.

6. (4p) Betrakta R^5 med den inreprodukten

$$< (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5.$$

Bestäm en ortogonal bas för det delrum W till R^4 som spänns upp av vektorerna $(1,1,-1,2,3)$, $(0,0,0,0,0)$, $(2,3,1,3,2)$ och $(3,4,0,5,2)$, dvs bestäm en ortogonalbas för

$$W = span\{(1,1,-1,2,3),(0,0,0,0,0),(2,3,1,3,2),(3,4,0,5,5)\}.$$

Svar. Vi märker oss att W spänns upp av vektorerna $u = (1,1,-1,2,3)$ och $v = (2,3,1,3,2)$ då den sista vektoren $(3,4,0,5,5) = u+v$. Vi använder Gram-Schmidt metoden för att ortogonalisera vektorerna u och v. Med andra ord, vi byter ut vektoren v med

$$v' = v - \mathrm{Proj}_u v = \frac{< u,v >}{||u||^2}u.$$

Vi har att $< u,v >= 2+3-1+6+6 = 16$ och att $||u||^2 = 1+1+1+4+9 = 16$. Detta ger att

$$v' = v-u = (2,3,1,3,2)-(1,1,-1,2,3) = (1,2,2,1,-1),$$

och vi har at $\{u,v'\}$ är en ortogonal bas för W.

7. (4p) Låt $V = M_{n\times n}$ vara vektorrummet av $(n \times n)$-matriser, och låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildning som skickar en matris A till
$$T(A) = A + A^T,$$
där A^T är den transponerade till A. Visa att varje nollskild symmetrisk matris X är en egenvektor för T, och bestäm dets egenvärde.

Svar Låt matrisen X vara symmetrisk, dvs. $X^T = X$. Vi har då att T skickar denna vektoren till
$$T(X) = X + X^T = X + X = 2 \cdot X.$$
Med andra ord är X en egenvektor med egenvärdet två.

8. (4p) Vektorerna $B = \{e_1, e_2\}$ är en bas för vektorrummet V, och $B' = \{f_1, f_2\}$ en annan bas. Sambandet mellan vektorerna ges av
$$e_1 = f_1 + f_2 \qquad \text{och} \qquad f_2 = 2f_1 - e_2.$$
Bestäm övergångsmatrisen, dvs transitionsmatrisen, från basen B till basen B'.

Svar. Vi måste uttrycka basvektorerna för basen B i basen B'. Av relationerna har vi att $e_1 = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$. Detta ger att koordinatmatrisen till vektoren e_1 i basen B' blir $[e_1]_{B'} = [1\ 1]^T$. Vi har vidare att $e_2 = 2f_1 - f_2$ sådan att $[e_2]_{B'} = [2\ 1]^T$. Övergångsmatrisen blir då
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. (5p) Planet π i R^3 har ekvationen $x + 2y - 3z = 0$. Låt T vara spegling i planet π. Bestäm en matrisrepresentation av T relativt till någon bas B för R^3 som du väljer själv.

Svar. Det är klart att vektorerna X i planet π skickas till $T(X) = X$, och at normalvektoren $n = (1, 2, -3)$ skickas till $T(n) = -n$. Vi väljer någon bas e_1 och e_2 för planet π, t.ex. $e_1 = (-2, 1, 0)$ och $e_2 = (3, 0, 1)$. En bas för hela R^3 är $B = \{e_1, e_2, n\}$. En matrisrepresentation till den linjära avbildningen $T : R^3 \to R^3$ i basen B blir
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. (6p) Undersök om det finns någon en rät linje genom origo som skär de bägge linjerna $(x, y, z) = (2, 1, 2) + t(3, 1, -1)$ och $(x, y, z) = (0, 2, 4) + t(4, 3, 1)$.

Svar. Vi börjar med att bestämma en ekvation för planet π som går genom origo och som innehåller den ena linjen $L = \{(2 + 3t, 1 + t, 2 - t)\}$. En normalvektor för planet π hittar vi som kryssprodukten av två linjärt oberoende vektorer i planet. Två sådana vektorer är riktningvektoren till linjen L, vektoren $v = (3, 1, -1)$, och vektoren $P = (2, 1, 2)$ som er en punkt på linjen L. Vi får då att
$$n = (2, 1, 2) \times (3, 1, -1) \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 8, -1).$$
En ekvation för planet π ges då av $-3x+8y-z = 0$. Det är klart att alla linjer i planet π som går genom origo skär linjen L, och att en linje genom origo og linjen L måste ligga i planet π. Frågan vi är interesserad av att besvara är om den andra linjen $L' = \{(4t, 2 + 3t, 4 + t)\}$ skär planet π. Om planet π och linjen L' skär verandra då finns det en linje genom origo som skär L och L', och om inte π och L' har någon skärning då är svaret nej. Skärningen av π och L' ges av ekvationen
$$-3 \cdot (4t) + 8 \cdot (2 + 3t) - 1 \cdot (4 + t) = 0.$$
Ekvationen över reducerar till ekvationen $11t + 12 = 0$ som uppenbarligen har lösning.