

Matematiska Institutionen
KTH

**Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 den 11 januari 2006
klockan 08.00-13.00.**

Examinator: Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 24 poäng ger betyget fyra och 32 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2005.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 2)$ till linjen $3x + 4y = 1$.

Svar: Avståndet ges av formeln

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2.$$

2. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: Egenvärden ges som nollställen till polynomet

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Polynomet $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$ har nollställen $\lambda = -2$ och $\lambda = 5$. Egenvektorerna tillhörande $\lambda = -2$ bestäms av de nollskilda lösningarna till

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Detta ger att vektorer på formen $(t, -t)$, med $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärdet -2 . På samma sätt finner vi att vektorer på formen $(3t, 4t)$, med $t \neq 0$ är egenvektorer med egenvärdet 5 .

3. (3p) För vilka reella tal a är matrisen A inverterbar, där

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar: Matrisen är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Vi har att

$$\det(A) = a \cdot 1 \cdot (a - 1) = a(a - 1).$$

Matrisen A är inverterbar om $a \neq 0$ och $a \neq 1$.

4. (3p) För den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1, 1) = (2, 3)$ och $T(1, 2) = (-4, -6)$. Bestäm bildrummet till T .

Svar: Vektorerna $(1, 1)$ och $(1, 2)$ är en bas för $\mathbf{R}^2$ och följaktligen spänner $T(1, 1)$ och $T(1, 2)$ upp bildrummet. Vi ser att $T(1, 2) = -2T(1, 1)$, och det följer att $T(1, 1) = (2, 3)$ är en bas för bildrummet till T , m.a.o. bildrummet är linjen genom origo och punkten $(2, 3)$.

5. (3p) Visa att

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$$

för $n = 1, 2, 3, \dots$

Svar: Vi använder induktion på n . Tilfallet $n = 1$ är OK, och vi antar att påståendet är sant för n . Vi vill visa att påståendet för $n+1$, dvs att $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$. Vi har att

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 \quad (1)$$

$$= 2n^4 - n^2 + (2(n+1)-1)^3, \quad (2)$$

var vi använder induktionshypotesen i steg (2). Vi fortsätter att utveckla uttrycket

$$2n^4 - n^2 + (2(n+1)-1)^3 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1. \quad (3)$$

Uttrycket ovan (3) kan man lätt kolla är lika med $2(n+1)^4 - (n+1)^2$, vilket visar påståendet.

6. (4p) Bestäm en ortonormal bas för $\mathbf{R}^2$ med den viktade inreprodukten

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2.$$

Svar: Vi har att $e_1 = (1, 0)$ och $e_2 = (0, 1)$ är en bas, och detta är också en ortogonal bas med avseende på den viktade inreprodukten. Vektoren e_1 har längd

$$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{2}, \quad \text{och} \quad \|e_2\| = \sqrt{3}.$$

Det följer nu att vektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}e_1$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$ är en orthonormal bas.

7. (4p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet i det Euklidiska inreproduktrummet $\mathbf{R}^4$ till delrummet

$$W = \text{Span}\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$

Svar: Vi ser att vektoren $(1, 1, 0, 1)$ kan skrivas som summan av $(1, 0, 0, 0)$ och $(0, 1, 0, 1)$. Vektorrummet W är då två dimensionellt, och en bas för dets ortogonala komplement skall bestå av två vektorer. Följande två vektorer

$$(0, 0, 1, 0) \quad \text{och} \quad (0, 1, 0, -1)$$

är linjärt oberoende och med i det ortogonala komplementet till W ; och dermed också en bas för $W^\perp$.

8. (4p) Låt Π beteckna planet som ges av ekvationen $x + y - 2z = 3$. Bestäm en ekvation för det plan som ligger vinkelrätt mot Π och som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$ och $(0, -1, 1)$.

Svar: Det sökta planet P innehåller punkterna $A = (1, 1, 1)$ och $B = (0, -1, 1)$, och då också linjen $(1, 1, 1) + t(1, 2, 0)$. En normal till planet P fås vid $n \times v$, där $n = (1, 1, -1)$ är normalen till Π och $v = (1, 2, 0)$ är riktningsvektoren till linjen. Vi har att

$$N = n \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 1).$$

En ekvation till det sökta planet P blir då t.ex.

$$((x, y, z) - A) \cdot N = 2(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 2x - y + z - 2 = 0.$$

9. (5p) Spåret till en $(n \times n)$ -matris $A = (a_{i,j})$ defineras som summan av diagonalelementen; $\text{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$. Vi har en linjär avbildning

$$\text{Tr} : M_{n,n} \rightarrow \mathbf{R}$$

från vektorrummet av $(n \times n)$ -matriser till de reella talen som skickar en matris A till dess spår. Bestäm dimensionen till kärnan av Tr .

Svar: Avbildningen Tr är uppenbarligen surjektiv. Av dimensionsatsen följer det att dimensionen till kärnan K är

$$\dim(K) = \dim(M_{n,n}) - \dim(\mathbf{R}) = n^2 - 1.$$

10. (6p) Låt $T : V \rightarrow V$ vara en linjär avbildning på ett vektorrum V av dimension n . Antag att $\ker(T) \neq 0$ och att T har $n - 1$ olika nollskilda egenvärden. Visa att T är diagonaliserbar.

Svar: En operator är diagonaliserbar om och endast om egenrummet E är lika med V . Då kärnan till T är nollskild har vi att $T(x) = 0 = 0 \cdot x$ för åtminstone en nollskild vektor x . Detta ger att 0 är ett egenvärde, och vi vet att det finns $n - 1$ olika nollskilda egenvärden. Totalt har vi då n olika egenvärden. Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende vilket ger att $\dim(E) \geq n$. Då dimensionen till V är n har vi att egenrummet $E = V$, och att T är diagonaliserbar.