Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 den 11 januari 2006 klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 24 poäng ger betyget fyra och 32 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2005.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Bestäm avståndet från punkten $P = (1, 2)$ till linjen $3x + 4y = 1$.
2. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$
3. (3p) För vilka reella tal a är matrisen A inverterbar, där
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
4. (3p) För den linjära avbildningen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1, 1) = (2, 3)$ och $T(1, 2) = (-4, -6)$. Bestäm bildrummet till T.
5. (3p) Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 2n^4 - n^2$$
för $n = 1, 2, 3, \ldots$.
6. (4p) Bestäm en ortonormal bas för $\mathbf{R}^2$ med den viktade inreprodukten
$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= 2x_1y_1 + 3x_2y_2.$$
7. (4p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet i det Euklidiska inreproduktrummet $\mathbf{R}^4$ till delrummet
$$W = \text{Span}\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}.$$
8. (4p) Låt Π beteckna planet som ges av ekvationen $x + y - 2z = 3$. Bestäm en ekvation för det plan som ligger vinkelrätt mot Π och som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$ och $(0, -1, 1)$.

9. (5p) Spåret till en $(n \times n)$-matris $A = (a_{i,j})$ defineras som summan av diagonalelementen; $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$. Vi har en linjär avbildning

$$\mathrm{Tr} : M_{n,n} \to \mathbf{R}$$

från vektorrummet av $(n \times n)$-matriser till de reella talen som skickar en matris A till dess spår. Bestäm dimensionen till kärnan av Tr.

10. (6p) Låt $T : V \to V$ vara en linjär avbildning på ett vektorrum V av dimension n. Antag att $\ker(T) \neq 0$ och att T har $n - 1$ olika nollskilda egenvärden. Visa att T är diagonaliserbar.