Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 och D1 den 4 december 2006.

1. **Lösning** Koordinaterna (x_1, x_2, x_3) till den givna vektorn i den givna basen är reella tal sådana att
$$(1, 2, 3) = x_1(1, 2, 1) + x_2(1, 1, 1) + x_3(2, 1, 0).$$
Detta leder till ekvationssytemet
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array}\right. .$$
Vi utför Gausselimination och får, med räkningar i tablåform:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$
Uppenbarligen har vi att $x_3 = -1$ varur $x_2 = -3x_3 = 3$ och $x_1 = 1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

Svar: Koordinaterna blir $(x_1, x_2, x_3) = (0, 3, -1)$.

2. **Lösning** Vi kan att
$$1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad 1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}, \quad \sqrt{3}/2 - i/2 = e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$
Med hjälp av DeMoivres formel får vi att det givna komplexa talet kan skrivas
$$\frac{\sqrt{2}^{25} e^{25\frac{\pi}{4}i} e^{-12\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{2}^{13} e^{-13\frac{\pi}{4}i}}.$$
Sedvanlig bråkräkning och räkning med exponenter ger nu att ovanstående tal är lika med
$$\sqrt{2}^{12} e^{38\frac{\pi}{4}i} e^{-2\pi i} = 2^6 e^{30\frac{\pi}{4}i} = 64e^{-\frac{\pi}{2}i + 4\cdot 2\pi}.$$
Svar: Beloppet är 64 och argumentet är $-\pi/2$ plus en godtycklig multipel av 2π.

3. **Lösning** Med hjälp av matrisinvers får vi
$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -16 & 9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$
som utgör svaret.

4. **Lösning**

   (a) Punkten ligger i planet precis då punktens koordinater satisfierar planets ekvation. Vi testar detta och finner att
   $$1 + 2(-2) + 4 \cdot 2 = 5.$$
   Punkten tillhör alltså planet.

   (b) En punkt $(x, y, z) = (1 + 2t, 1, 1 - t)$ på linjen tillhör planet precis då
   $$1(1 + 2t) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (1 - t) = 5 \quad \text{dvs} \quad 7 - 2t = 5 \quad \text{dvs när} \quad t = 1.$$
   Den sökta skärningspunkten är alltså $Q = (x, y, z) = (1 + 2 \cdot 1, 1, 1 - 1) = (3, 1, 0)$ Avståndet mellan P och Q blir då
   $$|PQ| = |(3, 1, 0) - (1, -2, 2)| = |(2, 3, -2)| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}.$$

5. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösning Karaktersitiska ekvationen
$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-1-\lambda)^2$$
har rötterna $\lambda = 0$ och $\lambda = -1$ (dubbelrot). Egenvektorer bestämmes på sedvanligt sätt:

Till $\lambda = 0$*:*
$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
med lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 0)$ som ger egenrummet $E_0 = span\{(1, 0, 0)\}$

Till $\lambda = -1$*:*
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$
med lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, -1)$ som ger egenrummet $E_{-1} = span\{(1, 0, -1)\}$

6. **Lösning**

   (a) Se läroboken t ex.

   (b) Kolonnerna i en $n \times n$-matris bildar en bas för R^n precis då matrisens determinant är skild ifrån noll. Vi får
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix} = 0.$$
   Slutsatsen blir att vektorerna inte för något värde på konstanten a kan bilda en bas för R^4 .

7. **Lösning** Vi placerar vektorerna som avbildas och deras bilder som rader i en matris enligt nedan:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Bilden av en rad till vänster i tablån ovan står till höger om strecket. Eftersom A är linjär gäller detta förhållande efter vilket slag av sk elementära radoperationer som helst, (den sk Martins metod). Vi försöker nu med hjälp av elementära radoperationer skapa rader som slutar med 100, 010 resp 001.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -7 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -9 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-4}{7} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ur tabellen ovan läser vi av

Svar: $\bar{f}_1 = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7})$, $\bar{f}_2 = (\frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7})$, $\bar{f}_3 = (\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{-4}{7})$

8. **Lösning** Pyramidens dubbla basyta gånger pyramidens höjd är lika med volymen av den parallellepiped som har hörn i de angivna punkterna, och som spänns upp av vektorerna

$$\begin{aligned} &(1,0,-1) - (2,3,1) = (-1,-3,-2), \\ &(1,0,-1) - (1,1,1) = (0,-1,-2), \\ &(1,0,-1) - (4,1,0) = (-3,-1,-1). \end{aligned}$$

Pyramidens volym blir alltså en sjättedel av volymen av denna paralellepiped som ju har volymen

$$|\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |\ (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}| = 11$$

Således

Svar: 11/6

9. **Lösning** Informationen räcker därför att den karakteristiska ekvationen visar sig ha en dubbelrot skild från den givna roten $\lambda = 5$. Vi finner nämligen att

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 16\lambda + 20 = (\lambda - 5)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = -(\lambda - 5)(\lambda + 2)^2.$$

Då matrisen är symmetrisk är egenvektorer som hör till skilda egenvärden ortogonala samt det finns en bas för R^3 bestående av egenvektorer till matrisen. Tager nu en ortogonalbas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ sådan att $\bar{e}_1 = (1,1,1)$ samt $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ godtyckliga men ortogonala mot $\bar{e}_1$. Då gäller pga detta att $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ tillhör egenrummet E_{-2} och därmed att

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\bar{e}_1 &= 5\bar{e}_1 \\ \mathbf{A}\bar{e}_2 &= -2\bar{e}_2 \\ \mathbf{A}\bar{e}_3 &= -2\bar{e}_3 \end{aligned}$$

Ovanstående måste gälla för varje val av egenvektorer $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ i egenrummet E_{-2}. Låt A vara den linjära avbildning som matrisen $\mathbf{A}$ beskriver. Då gäller att A är entydigt bestämd av villkoren ovan och därmed finns bara en möjlighet för matrisen $\mathbf{A}$.

10. (a) **Lösning** Vi visar att denna produkt uppfyller alla krav på att vara en inre produkt:

$$(i) \quad <(y_1,y_2,y_3)|(x_1,x_2,x_3)>= y_1x_1+y_2x_2+2y_2x_3+2y_3x_2+6y_3x_3 = \\ x_1y_1+x_2y_2+2x_2y_3+2x_3y_2+6x_3y_3 =<(x_1,x_2,x_3)|(y_1,y_2,y_3)>.$$

$$(ii) \quad <(x_1,x_2,x_3)|\lambda(y_1,y_2,y_3)>= x_1\lambda y_1+x_2\lambda y_2+2x_2\lambda y_3+2x_3\lambda y_2+6x_3\lambda y_3 = \\ \lambda(x_1y_1+x_2y_2+2x_2y_3+2x_3y_2+6x_3y_3) = \lambda <(x_1,x_2,x_3)|(y_1,y_2,y_3)>.$$

$$(iii) \quad <(x_1,x_2,x_3)|(y_1,y_2,y_3)+(z_1,z_2,z_3)>= \\ x_1(y_1+z_1)+x_2(y_2+z_2)+2x_2(y_3+z_3)+2x_3(y_2+z_2)+6x_3(y_3+z_3) = \\ (x_1y_1+x_2y_2+2x_2y_3+2x_3y_2+6x_3y_3)+(x_1z_1+x_2z_2+2x_2z_3+2x_3z_2+6x_3z_3) = \\ <(x_1,x_2,x_3)|(y_1,y_2,y_3)> + <(x_1,x_2,x_3)|(z_1,z_2,z_3)>$$

Dessutom måste

$$(iv) <(x_1,x_2,x_3)|(x_1,x_2,x_3)>= x_1x_1+x_2x_2+2x_2x_3+2x_3x_2+6x_3x_3 > 0 \quad \text{för} \quad \bar{x} \neq \bar{0}$$

dvs denna kvadratiska form skall visas vara positivt definit. Den tillhörande symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

har karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(6-\lambda)-4] = (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+2)$$

En rot till karakteristiska ekvationen är uppenbarligen $\lambda = 1$. Då ekvationen $\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$ har rötterna $\lambda = 7/2 \pm \sqrt{(7/2)^2 - 2}$ så är alla rötter till karakteristiska ekvationen positiva och därmed den kvadratiska formen positivt definit.
Alla kraven $(i) - (iv)$ på en inre produkt har nu visats vara uppfyllda.

(b) **Lösning** Vi låter $\bar{e}_1 = (1,0,0)$ och $\bar{e}_2 = (0,1,0)$. Använder nu Gram-Schmidts metod för att hitta en tredje vektor $\bar{e}_3$ ortogonal mot dessa två. Med $\bar{f}_3 = (0,0,1)$ får vi

$$\bar{e}_3 = f_3 - \left(\frac{<\bar{f}_3|\bar{e}_1>}{<\bar{e}_1|\bar{e}_1>}\bar{e}_1 + \frac{<\bar{f}_3|\bar{e}_2>}{<\bar{e}_2|\bar{e}_2>}\bar{e}_2\right) = (0,0,1) - \left(\frac{0}{1}(1,0,0) + \frac{2}{1}(0,1,0)\right) = (0,-2,1).$$

Svar: $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ och $\bar{e}_3 = (0,-2,1)$