Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 och D1 den 4 december 2006 klockan 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2006.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Vektorerna $\bar{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1)$, och $\bar{e}_4 = (2, 1, 0)$ bildar en bas för R^3. Detta behöver du inte visa men du skall bestämma koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3)$ i denna bas.

2. (3p) Bestäm belopp och argument för det komplexa talet
$$\frac{(1+i)^{25}(\sqrt{3}/2 - i/2)^{12}}{(1-i)^{13}}.$$

3. (3p) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ där
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Vi betraktar planet π med ekvationen $x + 2y + 4z = 5$, punkten P med koordinaterna $(1, -2, 2)$ och linjen ℓ med parameterformen $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 0, -1)$. (ON-system)
   (a) (1p) Avgör om punkten P tillhör planet π.
   (b) (2p) Låt Q vara skärningspunkten mellan linjen ℓ och planet π. Bestäm avståndet mellan punkterna P och Q. (Delpoäng erhålles om punkten Q bestäms.)

5. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. (a) (2p) Definiera vad som menas med en bas för ett vektorrum.
   (b) (2p) Undersök om det finns något värde på talet a för vilket följande fyra vektorer i R^4 bildar en bas för R^4:
$$(1, 1, 1, -1), \quad (1, 3, -1, -5), \quad (2, 3, 1, -4), \quad (2, 3, 2, a).$$

7. (4p) För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att

$$A(1,1,2) = (2,0,1), \quad A(1,0,-1) = (1,2,3), \quad A(0,0,1) = (1,1,0).$$

Undersök om det finns vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ sådana att

$$A\bar{f}_1 = (1,0,0), \quad A\bar{f}_2 = (0,1,0), \quad A\bar{f}_3 = (0,0,1),$$

och bestäm i så fall samtliga sådana vektorer $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$.

8. (4p) Volymen av en pyramid är lika med en tredjedel av pyramidens basyta multiplicerad med höjden. Detta gäller även sneda pyramider och pyramider vars basyta är en triangel.(Detta behöver du inte visa!) Bestäm volymen av den pyramid som har hörn i punkterna $(1,0,-1)$, $(2,3,1)$, $(1,1,1)$ och $(4,1,0)$. (ON-system)

9. (4p) Avgör om nedanstående information räcker för att bestämma matrisen $\mathbf{A}$ entydigt:

   (a) $\mathbf{A}$ är symmetrisk.

   (b) Den karakteristiska ekvationen $0 = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ till matrisen $\mathbf{A}$ är

   $$-\lambda^3 + \lambda^2 + 16\lambda + 20 = 0.$$

   (c) Vektorn $(1 \;\; 1 \;\; 1)^T$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdet 5.

10. (a) (2p) Visa att nedanstående produkt definierar en inre produkt på R^3:

   $$< (x_1,x_2,x_3)|(y_1,y_2,y_3) >= x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

   (b) (2p) Bestäm en ortogonalbas i R^3 relativt denna inre produkt, dvs en bas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ fór R^3 sådan att $< \bar{e}_i|\bar{e}_j >= 0$ för $i \neq j$.
   Anm: Poäng kan erhållas på uppgift (b) även om uppgift (a) inte har lösts.