Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 och D1 den 9 juni 2007 klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2006.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Ge ett induktionsbevis för formeln

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{för} \quad n=1,2,3,\ldots.$$

(Vid bedömningen av lösningen till uppgiften fästes stor vikt vid kvaliten i presentationen av lösningen.)

Lösning: Formeln är uppenbarligen sann för $n=1$ eftersom vänstra ledet är 1 och lika med det högra ledet som är 1 när $n=1$.
Vi visar nu at för varje naturligt tal $n \geq 1$ gäller att

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 1+2+3+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Så antag att

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Då gäller att

$$1+2+3+\ldots+(n+1)=1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Därmed är också implikationen visad och formeln följer av induktionsaxiomet.

2. (3p) Bestäm samtliga lösningar till det linjära ekvationssytemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

Lösning:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1 & - & x_3 \\ & & x_2 & = & 2 & + & 2x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & = & -1 & - & 3x_3 \\ & & x_2 & = & 2 & + & 2x_3 \end{array}\right.$$

Med $x_3 = t$, får vi $(x_1, x_2, x_3) = (-1 - 3t, 2 + 2t, t)$ och därmed

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 0) + t(-3, 2, 1)$, t godtyckligt reellt tal.

3. De bägge linjerna $\ell_1 : \ (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(2, 1, -1)$ och $\ell_2 : \ (x, y, z) = (2, 0, 3) + t(2, 0, 0)$ skär varandra i en punkt P.

   (a) (1p) Bestäm skärningspunkten P.

   Lösning: Till punkten $P = (x, y, z)$, som tillhör bägge linjerna, finns tal t och s sådana att
   $$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(2, 1, -1) = (2, 0, 3) + s(2, 0, 0).$$
   Detta ger ett system för t och s
   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 1 & + & 2t & = & 2 & + & 2s \\ 2 & + & t & = & 0 & & \\ 1 & - & t & = & 3 & & \end{array}\right.$$
   som ju uppenbarligen har lösningen $t = -2$ och $s = -5/2$. Skärningspunkten blir då
   Svar: $(x, y, z) = (1, 2, 1) + (-2)(2, 1, -1) = (-3, 0, 3)$.

   (b) (1p) Bestäm cosinus för vinkeln mellan linjerna.

   Lösning: Vinkeln mellan linjerna är vinkeln mellan linjernas riktningsvektorer $(2, 1, -1)$ och $(2, 0, 0)$. cosinus för denna vinkel ges av
   $$\frac{(2, 1, -1) \cdot (2, 0, 0)}{||(2, 1, -1)|| \cdot ||(2, 0, 0)||} = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

   (c) (1p) Bestäm en linje genom P och vinkelrät mot både ℓ_1 och ℓ_2.

   Lösning: En riktning vinkelrät mot de givan linjernas riktningsvektorer ges av kryssprodukten
   $$(2, 1, -1) \times (2, 0, 0) = (0, -1, -1).$$
   En punkt med den sökta linjen är skärningspunkten $(-3, 0, 3)$. Således
   Svar: $(x, y, z) = (3, 0, -3) + t(0, -1, -1)$.

4. (3p) Låt $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ vara nedanstående matriser.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{C})$.

Lösning:

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{AC} = [1 \ -1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{CB}^T\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beräknar nu $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tillslut

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{CB}^T\mathbf{AC}) = 11 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 44 \\ -33 \end{bmatrix}$$

5. (3p) Undersök om det finns tal a, b och c, sådana att vektorn $(1, 2, -1)$ blir en egenevektor till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{bmatrix}.$$

Bestäm i så fall samtliga sådana tal a, b och c.

Lösning: Vektorn i fråga är en egenvektor precis då

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

för något tal λ. Då

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5-a \\ 2+2b-c \end{bmatrix},$$

så gäller detta precis då $\lambda \cdot 1 = 2$, $5 - a = \lambda \cdot 2 = 4$ och $2 + 2b - c = \lambda \cdot (-1) = -2$. Detta ger vektorn är en egenvektor precis då $a = 1$ och $c - 2b = 4$. Med $b = s$ godtyckilgt har vi då

Svar: Vektorn är en egenvektor precis då $(a, b, c) = (1, 0, 4) + s(0, 1, 2)$, s godtyckligt.

6. (a) (2p) Definiera begreppet bas för ett vektorrum.

   Lösning: Se lärobok.

   (b) (2p) För tretiplarna $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ i R^3 gäller att

$$\begin{array}{rcrcrcr} (1,2,3) & = & \bar{u} & + & 2\bar{v} & - & \bar{w} \\ (0,1,1) & = & \bar{u} & + & 3\bar{v} & - & 2\bar{w} \\ (1,0,1) & = & 2\bar{u} & + & \bar{v} & + & 2\bar{w} \end{array}$$

   Avgör om $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är en bas för R^3.

   Lösning: Vi löser ekvationssytemet med avseende på $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (1,2,3) & = & \bar{u} & + & 2\bar{v} & - & \bar{w} \\ (0,1,1) & = & \bar{u} & + & 3\bar{v} & - & 2\bar{w} \\ (1,0,1) & = & 2\bar{u} & + & \bar{v} & + & 2\bar{w} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcr} (1,2,3) & = & \bar{u} & + & 2\bar{v} & - & \bar{w} \\ (-1,-1,-2) & = & & & \bar{v} & - & \bar{w} \\ (-1,-2,-5) & = & & - & 3\bar{v} & + & 4\bar{w} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcr} (1,2,3) & = & \bar{u} & + & 2\bar{v} & - & \bar{w} \\ (-1,-1,-2) & = & & & \bar{v} & - & \bar{w} \\ (-4,-5,-11) & = & & & & & \bar{w} \end{array}\right. ,$$

   varur vi får att

$$\bar{v} = (-1,-1,-2) + (-4,-5,-11) = (-5,-6,-13)$$

   och

$$\bar{u} = -2(-5,-6,-13) + (-4,-5,-11) = (6,7,15).$$

   De tre vektorerna är då en bas för R^3 om nedanstående determinant inte är noll:

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 6 \\ -5 & -6 & 7 \\ -11 & -13 & 15 \end{vmatrix}.$$

   Vi får

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 6 \\ -5 & -6 & 7 \\ -11 & -13 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -6 & 7 \\ 2 & -13 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

   Så determinanten är lika med noll. De givna vektorerna är inte en bas.

7. (4p) Ekvationerna $x^3 + 9x^2 + 23x + 30 = 0$ och $x^3 + 7x^2 + 8x + 12 = 0$ har en gemensam rot. Lös båda ekvationerna.

   Lösning: Om r är en rot till de bägge ekvationerna gäller att

$$r^3 + 9r^2 + 23r + 30 = 0$$
$$r^3 + 7r^2 + 8r + 12 = 0$$

   Subtraherar vi de bägge ekvationerna ovan, led för led, finner vi att $2r^2 + 15r + 18 = 0$. Den gemensamma roten r måste satisfiera denna ekvation, som enkelt visas ha rötterna $r = -6$ och $r = -3/2$. Vi prövar nu bägge dessa rötter i de givna ekvationerna och finner att $r = -6$

är den gemensamma roten. Enligt faktor satsen är då $x + 6$ en faktor i de bägge givna polynomen. Polynomdivision ger nu

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 30 = (x + 6)(x^2 + 3x + 5)$$

och

$$x^3 + 7x^2 + 8x + 12 = (x + 6)(x^2 + x + 2).$$

Sedvanlig lösning av andragradsekvationer ger nu att $x^2 + 3x + 5 = 0$ har rötterna

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 5} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

och ekvationen $x^2 + x + 2 = 0$ har rötterna

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

Svar: Rötterna äro -6 och $\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$ resp -6 och $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$.

8. (4p) Karaktärisera den typ av yta som nedanstående ekvation beskriver:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz = -2.$$

(Vid bedömningen av lösningen till uppgiften tas hänsyn till hur mycket information om ytan som lösningen innehåller.)

Lösning: Vi skriver ekvationen med hjälp av matriser

$$(x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2.$$

Mycket information om andragradsytan ges av matrisens egenvärden och egenvektorer. Dessa sökes nu:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-\lambda - 1)$$

Sedvanliga egenvektorsberäkningar ger att $E_{-1} = span\{(-1, 1, 1)\}$ och $E_2 = span\{(0, 1, -1), (2, 1, 1)\}$. Vi diagonaliserar matrisen och gör därmed ett basbyte med hjälp av en ortogonalmatris: Vi får då

$$(\hat{x}\ \hat{y}\ \hat{z}) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = -2$$

dvs

$$-2\hat{x}^2 - 2\hat{y}^2 + \hat{z}^2 = 2 \quad \text{eller} \quad \hat{z}^2 = 2 + 2\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2.$$

Ytan är en cirkulär tvåmantlad hyperboloid. Talet 2 ovan är kortataste avståndet till origo i nya koordiantsystemet. Eftersom vi gjorde ett basbyte med hjälp av en ortogonalmatris förändras inte avstånd. Symmetriaxel är $\hat{z}$-axeln, dvs den axel som ges av egenvärdet -1, dvs en axel med riktningen $(-1, 1, 1)$.

9. (4p) I ett visst inreproduktrum bildar vektorerna $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ och $(1,1,1)$ en ON-bas. Bestäm i detta rum projektionen av vektorn $(1,-1,2)$ på delrummet $span\{(0,1,1),(1,0,-1)\}$.

Lösning: Låt $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (1,1,0)$ och $\bar{e}_3 = (1,1,1)$. Vi genomför ett basbyte och finner att att

$(0,1,1) = -\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \bar{e}_3$
$(1,0,-1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$
$(1,-1,2) = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$

Problemet formuleras nu om i den nya basen till följande. Bestäm projektionen av vektorn $(2,-3,2)$ på $L = span\{(-1,0,1),(1,1,-1)\}$ givet en ON-system. Enklast är kanske att använda projektionsformeln

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kalkyler ger att

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Den sökta projektionen är alltså

$$\frac{1}{2}(3\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3) = \frac{1}{2}(-6,-9,-3).$$

10. (4p) Undersök om det finns någon matris $\mathbf{A}$ sådan att

$$\mathbf{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \;\; 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{för} \quad n = 1,2,3.$$

Bestäm i så fall en sådan matris $\mathbf{A}$.

Lösning: Uppenbarligen gäller

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \;\; -1 \end{pmatrix}$$

och vidare

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \;\; -2 \end{pmatrix}.$$

Om vi skulle hitta en matris som uppfyllde dessa tre krav, skulle vi vara klara. De tre vektorerna $(1,1,1)$, $(2,1,0)$ och $(3,1,-1)$ är emellertid inte en bas eftersom de samtliga ligger i det 2-dimensionella spannet $L = span\{(1,1,1),(1,0,-1)$. Vi ser att

$$(3,1,-1) = 2(2,1,0) - (1,1,1)$$

och att då skulle också

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = 2\mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix},$$

vilket ju också stämmer.

Det räcker alltså att konstruera en matris A sådan att

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Tag nu en vektor som inte ligger i L, vilken som helst, t ex $(1, 0, 0)$ och låt $\mathbf{A}(1\ 0\ 0)^T$ vara vilken vektor som helts t ex (0 0 0). Då får vi en matris som duger:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Invertera och soppan är färdigkokt.