Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, 5B1109, för F1 och D1 den 9 juni 2007 klockan 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Gränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem

Bonuspoäng: Maximalt får sex bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2006.

Övrigt: Ge klara och kortfattade motiveringar till dina lösningar.

PROBLEM:

1. (3p) Ge ett induktionsbevis för formeln
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
(Vid bedömningen av lösningen till uppgiften fästes stor vikt vid kvaliten i presentationen av lösningen.)

2. (3p) Bestäm samtliga lösningar till det linjära ekvationssytemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

3. De bägge linjerna $\ell_1 : \ (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(2, 1, -1)$ och $\ell_2 : \ (x, y, z) = (2, 0, 3) + t(2, 0, 0)$ skär varandra i en punkt P.
   (a) (1p) Bestäm skärningspunkten P.
   (b) (1p) Bestäm cosinus för vinkeln mellan linjerna.
   (c) (1p) Bestäm en linje genom P och vinkelrät mot både ℓ_1 och ℓ_2.

4. (3p) Låt $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ vara nedanstående matriser.
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{C})$.

5. (3p) Undersök om det finns tal a, b och c, sådana att vektorn $(1, 2, -1)$ blir en egenevektor till matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{bmatrix}.$$
Bestäm i så fall samtliga sådana tal a, b och c.

6. (a) (2p) Definiera begreppet bas för ett vektorrum.
   (b) (2p) För tretiplarna $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ i R^3 gäller att

$$\begin{array}{rclcrcr} (1,2,3) & = & \bar{u} & + & 2\bar{v} & - & \bar{w} \\ (0,1,1) & = & \bar{u} & + & 3\bar{v} & - & 2\bar{w} \\ (1,0,1) & = & 2\bar{u} & + & \bar{v} & + & 2\bar{w} \end{array}$$

   Avgör om $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är en bas för R^3.

7. (4p) Ekvationerna $x^3 + 9x^2 + 23x + 30 = 0$ och $x^3 + 7x^2 + 8x + 12 = 0$ har en gemensam rot. Lös båda ekvationerna.

8. (4p) Karaktärisera den typ av yta som nedanstående ekvation beskriver:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz = -2.$$

   (Vid bedömningen av lösningen till uppgiften tas hänsyn till hur mycket information om ytan som lösningen innehåller.)

9. (4p) I ett visst inreproduktrum bildar vektorerna $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ och $(1,1,1)$ en ON-bas. Bestäm i detta rum projektionen av vektorn $(1,-1,2)$ på delrummet $span\{(0,1,1),(1,0,-1)\}$.

10. (4p) Undersök om det finns någon matris $\mathbf{A}$ sådan att

$$\mathbf{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{för} \quad n = 1,2,3.$$

    Bestäm i så fall en sådan matris $\mathbf{A}$.