Matematiska Institutionen
KTH

Tentamen på kursen SF1604 (och 5B1109), för D1, Mars 29, 2008, kl: 9:00-14:00.

Inga hjälpmedel ät tillåtna.

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: För omdömet Fx och betygen E, D, och C får maximalt 5 bonuspoäng tiigodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2007. För betygen A och B för inga bonuspoäng tillgodoräknas.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

PROBLEM:

DEL I

1. (3p) Bestäm för vilka värden på talet a som följande homogena ekvationssystem har triviala lösningar.

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2a^2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{cases}$$

2. (3p) Bestäm parameterformen för den linjen i planet med ekvationen $x + 3y - z = 5$ som passerar genom punkten $(0, 2, 1)$ och är vinkelrät mot $(1, 1, 1)$.

3. (3p) Bestäm dimension och ange en bas för det minsta delrum till $\mathbb{R}^4$ som innehåller vektorerna

$$(1, 3, 2, 5), (0, 2, 0, 8), (2, 0, 1, 0) \text{ och } (2, 2, 1, 8)$$

4. (3p) Betrakta vektorummet $V = Span\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ i $\mathbb{R}^4$. Bestäm projektionen av vektorn $(3, 1, 1, 0)$ på V.

5. (3p) Bestäm egenvärden och egenvktorer till följande matris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

DEL II

6. (4p) Betrakta den linjära funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - z, z - x, x - y).$$

(a) Bestäm matrisen $[F]_B$ med avseende på den kanoniska basen $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(b) Välj en annan bas $B' = (v_1, v_2, v_3)$ och bestäm basbytesmatrisen från B till B'.

(c) Bestäm matrisen $[F]_{B'}$ med avseende till basen B'.

7. (4p) Betrakta följande andragradskurva:

$$C : x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12x + 9 = 0.$$

(a) Bestäm den kanoniska formen (d.v.s. den huvudaxelformen) av C.

(b) Rita C (i koordinatena (x, y).)

8. (4p) Låt $r \subset \mathbb{R}^3$ vara linjen definierad av:

$$r : x - y = z - 1 = 0$$

Bestäm samtliga linjer s som är parallela till $(1, 0, -1)$ och sådana att distansen till linjen r är lika med ett, $d(s, r) = 1$. Finns det ändligt många sådana linjer?

DEL III

9. (5 p)

$$\text{Bestäm } A^{1000} \text{ om } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. (5p) Låt $M_3(\mathbb{R})$ vara vektorrummet av alla reella 3×3 matriser. Betrakta funktionen:

$$T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R}), T(A) = A^T.$$

(a) Visa att ± 1 är de enda egenvärderna till $[T]$.

(b) Hitta en bas B till $M_3(\mathbb{R})$ sådan att $[T]_B$ är en diagonalmatris.