Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604 (och 5B1109), för F1 och D1, lördagen den 31 maj 2008 klockan 08.00-13.00.

DEL I

1. (3p) Avgör om de tre vektorerna $\bar{e}_1 = (1,2,1)$, $\bar{e}_2 = (2,1,0)$ och $\bar{e}_3 = (0,1,1)$ kan användas som en bas för R^3 och ange i så fall koordinaterna för vektorn $(3,4,2)$ i denna bas.

   Lösning: De givna vektorerna är en bas för R^3 om och endast om determinanten för en matris vars kolonner utgörs av koordinterna för de givna vektorerna är skild från noll. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0,$$

   och alltså utgör de en bas. Koordinterna (x_1, x_2, x_3) för vektorn $(3,4,2)$ i denna bas uppfyller

$$x_1(1,2,1) + x_2(2,1,0) + x_3(0,1,1) = (3,4,2),$$

   vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & & & = 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 4 \\ x_1 & + & & + & x_3 & = 2 \end{cases},$$

   som vi löser i tablåform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   och vi finner att $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1$.

2. (3p) Skriv de bägge komplexa talen $(1-i)^{75}$ och $(1-i)^{-75}$ på formen $a + ib$.

   Lösning: Det är sant att

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

   och alltså

$$(1-i)^{75} = (\sqrt{2})^{75}(\cos(-75\frac{\pi}{4}) + i\sin(-75\frac{\pi}{4})) =$$

$$2^{37}\sqrt{2}\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i2^{37}\sqrt{2}\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -2^{38} + i2^{38},$$

   och

$$(1-i)^{-75} = (\sqrt{2})^{-75}(\cos(75\frac{\pi}{4}) + i\sin(75\frac{\pi}{4})) =$$

$$\frac{1}{2^{37}\sqrt{2}}\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\frac{1}{2^{37}\sqrt{2}}\sin(\frac{3\pi}{4}) = -2^{-37} - i2^{-37},$$

3. (3p) Låt
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Lös matrisekvationen $XA = 2B$.

Lösning: Matrisen A är inverterbar och man får att $X = 2BA^{-1}$. Vi använder formeln för invertering av 2×2-matriser och får då
$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{1\cdot 1 - 0\cdot 3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

4. (3p) Ett plan innehåller linjen ℓ med parameterformen
$$\ell \quad : \quad (x, y, z) = (0, 2, 1) + t(1, -1, 1),$$
samt punkten P med koordinaterna $(1, 2, 3)$. Bestäm planets ekvation samt avgör om punkten Q med koordinaterna $(1, 1, 1)$ tillhör planet. (ON-system)

Lösning: Med $t = 0$ får vi att punkten S med koordinaterna $(0, 2, 1)$ tillhör planet och därmed också att vektorn $PS = (1, 0, 2)$ är parallell med planet. För att bestämma planets ekvation behöver vi en normal till planet som vi kan ta som t ex kryssprodukten av $PS = (1, 0, 2)$ och den givna linjens riktningsvektor $(1, -1, 1)$:
$$\bar{n} = (1, 0, 2) \times (1, -1, 1) = (-2, -1, 1).$$
Planets ekvation blir nu
$$-2(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0, \qquad \text{dvs} \qquad 2x + y - z = 1.$$
Punkten Q tillhör planet precis då dess koordinater satisfierar planets ekvation. Vi finner att
$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2 \neq 1,$$
och såleds tillhör inte punkten Q det givna planet.

5. (3p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Undersök vilka av vektorerna $\bar{u} = (1, 3, 2, 1)$, $\bar{v} = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{w} = (1, 1, 0, 0)$ som är egenvektorer till matrisen, och bestäm i förekommande fall motsvarande egenvärden.

Lösning: Vi undersker om $A\bar{u}^T = \lambda_1\bar{u}^T$, $A\bar{v}^T = \lambda_2\bar{v}^T$ och $A\bar{w}^T = \lambda_3\bar{w}^T$ för några tal λ_1, λ_2 och λ_3:
$$A\bar{v}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\bar{v}^T, \qquad A\bar{w}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\bar{w}^T,$$
och således är $\bar{v}$ en egenvektor hörande till egenvärdet 4 och $\bar{w}$ en egenvektor hörande till egenvärdet 0. Liknande kalkyler ger att $\bar{u}$ inte är en egenvektor.

DEL II

6. (3p) Den linjära avbildningen A från R^5 till R^4 har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser för avbildningens nollrum (eng: kernel) $ker(A)$ och värderum (eng: range) $R(A)$.

Lösning: Avbildningens värderum är lika med matrisens kolonnrum och avbildningens nollrum är lika med matrisens nollrum. Med hjälp av elementära radoperationer, som vid lösandet av linjära ekvationssytem, kan en bas för kolonnrummet, och samtidigt matrisens nollrum, bestämmas.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sluttablåns fyra första kolonner är linjärt oberoende och spänner upp sluttablåns kolonnrum. Därav följer att matrisens fyra första kolonner är en bas för kolonnrummet. Elementära radoperationer ändrar ej nollrum eller matrisranger. Matrisens rang är fyra och då kommer matrisens nollrum att ha dimension ett. Ur sista kolonnen ser vi en vektor i matrisens nollrum nämligen $(3, -7, 3, 1, 1)$.

SVAR: Bas för kolonnrummet t ex $(1\ 0\ 1\ 2)^T$, $(1\ 1\ 2\ 4)^T$, $(1\ 1\ 3\ 4)^T$, $(1\ 2\ 1\ 3)^T$ och bas för nollrummet $(3\ -7\ 3\ 1\ 1)^T$

7. (4p) De punkter (x, y, z) i vanliga tredimensionella rymden (ON-system) som satisfierar ekvationen

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz = 40,$$

utgör en sk rotationsellipsoid, dvs uppstår när en ellips roterar runt en viss axel, rotationsaxeln. Bestäm rotationsaxelns riktning.

Lösning: Vi söker skriva ytans ekvation på huvudaxelform enligt receptet i läroboken:

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Vi söker nu den symmetriska matrisens egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 9-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(9-\lambda)(2-\lambda)-8] = (1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+10) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-10).$$

Ytan på huvudaxelform är således

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + 10\hat{z}^2 = 40.$$

Ytans snitt med plan parallella med $\hat{x}\hat{y}$-planet, dvs planen $\hat{z} = k$, utgörs av cirklarna

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 40 - 10k^2.$$

Rotationsaxelns riktning ges alltså av $\hat{z}$-axeln dvs av av riktningen av den egenvektor som hör till egenvärdet $\lambda = 10$. Bestämmer nu en sådan egenvektor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5-10 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 5-10 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2-10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & -9 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Systemets lösning är alltså $(x_1, x_2, x_3) = (-2, 2, 1)$.

8. (4p) På rummet $\mathcal{P}_2$ av polynom i variabeln t av grad högst 2 definieras en inre produkt genom

$$< p(t) \mid q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt.$$

Bestäm en ortogonalbas i $\mathcal{P}_2$ relativt denna inre produkt.

Lösning: Dimensionen hos rummet $\mathcal{P}_2$ är 3 och en bas är t ex polynomen $\bar{e}_1 = 1$, $\bar{e}_2 = t$ och $\bar{e}_3 = t^2$. Använder nu Gram-Schmidts metod för att hitta en ortogonalbas $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$. Låt $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$.

$$\bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \frac{< e_2 \mid f_1 >}{< f_1 \mid f_1 >}\bar{f}_1 = t - \frac{\int_0^1 t\, dt}{\int_0^1 1\, dt}1 = t - \frac{1}{2}.$$

$$\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{< \bar{e}_3 \mid \bar{f}_1 >}{< \bar{f}_1 \mid \bar{f}_1 >}\bar{f}_1 - \frac{< \bar{e}_3 \mid \bar{f}_2 >}{< \bar{f}_2 \mid \bar{f}_2 >}\bar{f}_2 = t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\, dt}{\int_0^1 1\, dt}1 - \frac{\int_0^1 t^2(t-\frac{1}{2})\, dt}{\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2\, dt}(t - \frac{1}{2}) =$$

$$t^2 - \frac{1}{3} - (t - \frac{1}{2}) = t^2 - t - \frac{1}{6}.$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen av problemen.

9. Ett linjärt inhomogent ekvationssytem för de obekanta x_1, x_2, x_3 och x_4 har bland annat följande tre lösningar

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 1, 2)$$

(a) (2p) Finns det fler lösningar till systemet. Bestäm i så fall ytterligare minst en lösning till systemet.

Lösning: Vi skriver systemet som en matrisekvation

$$A\bar{x}^T = \bar{b}^T,$$

och använder att om $\bar{x}_P$ är en lösning till denna ekvation så kan varje annan lösning skrivas som

$$\bar{x} = \bar{x}_P + \bar{x}_h,$$

för någon lösning $\bar{x}_h$ till motsvarande homogena system $A\bar{x}^T = \bar{0}^T$.
Låt nu

$$\bar{u} = (1, 0, -1, 2), \quad \bar{v} = (1, 1, 0, 0), \quad \bar{w} = (1, 2, 1, 2).$$

Då gäller att

$$A(\bar{u} - \bar{v})^T = \bar{0},$$

dvs $u - w = (1, 0, -1, 2) - (1, 1, 0, 0) = (0, -1, -1, 2)$ är en lösning till motsvarande homogena ekvationssytem, men då är också t ex

$$\bar{w} + (\bar{u} - \bar{v}) = (1, 2, 1, 2) + (0, -1, -1, 2) = (1, 1, 0, 4)$$

en annan lösning.

(b) (3p) Kan man med hjälp av den givna informationen bestämma samtliga lösningar till systemet. Om så ej är fallet ge minst ett exempel på mer information om systemet, som skulle göra att man kan ange samtliga lösningar.
Anm. Poäng sätts utifrån kvaliten på svaret.

Lösning: Med hjälp av de tre givna lösningarna genererar vi sex lösningar till motsvarande homogena system, se ovan, nämligen

$$\pm(\bar{u} - \bar{v}) = (0, -1, -1, 2), \quad \pm \pm (\bar{u} - \bar{w}) = (0, -2, -2, 0), \pm(\bar{w} - \bar{v}) = (0, 1, 1, 2),$$

som spänner upp et delrum L av lösningsrummet till det homogena systemet. Man kontrollerar lätt att $\dim(L) = 2$ och alltså eftersom matrisen A är av formatet $n \times 4$ att för matrisens rang gäller

$$rank(A) = 4 - \dim(N(A)) \leq 4 - 2 = 2,$$

där $N(A)$ betecknar matrisens nollrum. Hade vi nu t ex information om att matrisens rang vore två skulle samliga lösningar kunna anges:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2) + t(0, -1, -1, 2) + s(0, -2, -2, 0).$$

10. (a) (3p) Betrakta de tre linjerna ℓ_1, ℓ_2 och ℓ_3 i vanliga tredimensionella rymden, med respektive parameterform

$$\begin{aligned} \ell_1 &: (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(0, 1, 1) \\ \ell_2 &: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 0) \\ \ell_3 &: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 0, 1). \end{aligned}$$

Bestäm en linje ℓ som passerar genom samtliga de tre linjerna.

Lösning: Linjen ℓ_2 ligger i ett plan parallellt med xy-planet, planet $z = 3$. Linjen ℓ_1 skär detta plan för det t-värde som ger z-koordinaten i uttrycket $(1, 1, 1)+t(0, 1, 1)$ lika med 3, dvs $t = 2$. Denna linjes skärningspunkt med planet $z = 3$ är alltså punkten P med koordinaterna $(1, 3, 3)$. På samma sätt erhålls linjen ℓ_3:s skärningspunkt med planet till punkten Q med koordinaterna $(2, 0, 3)$. Linjen ℓ genom P och Q har rikningsvektorn $\bar{v} = (2, 0, 3)-(1, 3, 3) = (1, -3, 0)$ och är inte parallell med ℓ_2, men ligger helt i samma plan som denna linje. De skära alltså varandra. Men eftersom ℓ och skär ℓ_1 och ℓ_3 i P resp Q så har vi en linje som skär de tre linjerna.

(b) (3p) Gäller det för varje val av tre linjer i den vanliga tredimensionella rymden att det finns minst en linje som passerar genom tre godtyckligt valda linjer. Utred frågan.

Lösning: Tag tre parallella linjer som ej ligger i samma plan, då går det inte att hitta en linje genom alla tre lijerna, ty två av dessa definierar ett unikt plan π som bägge tillhör och varje linje som passerar dessa linjer ligger i detta plan π. Men om den tredje av dessa linjer inte är parallell med planet π så skär den planet π i en punkt P. Men en linje ℓ i π och genom P, som inte är parallell med de andra bägge linjerna, skär dessa linjer och ℓ är den sökta linjen. Med tre linjer som parvis ej är parallella är det lätt att se att det alltid finns en linje som skär de tre linjerna, jfr lösningen till uppgift a).