Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604 (och 5B1109), för F1 och D1, lördagen den 31 maj 2008 klockan 08.00-13.00.

Examinatorer: Olof Heden och Sandra Di Rocco

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 37p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: För omdömet Fx och betygen E, D, och C får maximalt fem bonuspoäng tillgodoräknas från lappskrivningar höstterminen 2007. För betygen A och B får inga bonuspoäng tillgodoräknas.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

PROBLEM:

DEL I

1. (3p) Avgör om de tre vektorerna $\bar{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\bar{e}_2 = (2, 1, 0)$ och $\bar{e}_3 = (0, 1, 1)$ kan användas som en bas för R^3 och ange i så fall koordinaterna för vektorn $(3, 4, 2)$ i denna bas.

2. (3p) Skriv de bägge komplexa talen $(1 - i)^{75}$ och $(1 - i)^{-75}$ på formen $a + ib$.

3. (3p) Låt
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Lös matrisekvationen $XA = 2B$.

4. (3p) Ett plan innehåller linjen ℓ med parameterformen
$$\ell \quad : \quad (x, y, z) = (0, 2, 1) + t(1, -1, 1),$$
samt punkten P med koordinaterna $(1, 2, 3)$. Bestäm planets ekvation samt avgör om punkten Q med koordinaterna $(1, 1, 1)$ tillhör planet. (ON-system)

5. (3p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Undersök vilka av vektorerna $\bar{u} = (1, 3, 2, 1)$, $\bar{u} = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{u} = (1, 1, 0, 0)$ som är egenvektorer till matrisen, och bestäm i förekommande fall motsvarande egenvärden.

DEL II

6. (3p) Den linjära avbildningen A från R^5 till R^4 har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   Bestäm baser för avbildningens nollrum (eng: kernel) $ker(A)$ och värderum (eng: range) $R(A)$.

7. (4p) De punkter (x, y, z) i vanliga tredimensionella rymden (ON-system) som satisfierar ekvationen

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz = 40,$$

   utgör en sk rotationsellipsoid, dvs uppstår när en ellips roterar runt en viss axel, rotationsaxeln. Bestäm rotationsaxelns riktning.

8. (4p) På rummet $\mathcal{P}_2$ av polynom i variabeln t av grad högst 2 definieras en inre produkt genom

$$< p(t) \mid q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt.$$

   Bestäm en ortogonalbas i $\mathcal{P}_2$ relativt denna inre produkt.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen av problemen.

9. Ett linjärt inhomogent ekvationssytem för de obekanta x_1, x_2, x_3 och x_4 har bland annat följande tre lösningar

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1, 0, -1, 2) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1, 1, 0, 0) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1, 2, 1, 2) \end{aligned}$$

   (a) (2p) Finns det fler lösningar till systemet. Bestäm i så fall ytterligare minst en lösning till systemet.

   (b) (3p) Kan man med hjälp av den givna informationen bestämma samtliga lösningar till systemet. Om så ej är fallet ge minst ett exempel på mer information om systemet, som skulle göra att man kan ange samtliga lösningar.

   Anm. Poäng sätts utifrån kvaliten på svaret.

10. (a) (3p) Betrakta de tre linjerna ℓ_1, ℓ_2 och ℓ_3 i vanliga tredimensionella rymden, med respektive parameterform

$$\begin{aligned} \ell_1 &: (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(0, 1, 1) \\ \ell_1 &: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 0) \\ \ell_1 &: (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 0, 1). \end{aligned}$$

   Bestäm en linje ℓ som passerar genom samtliga de tre linjerna.

   (b) (3p) Gäller det för varje val av tre linjer i den vanliga tredimensionella rymden att det finns minst en linje som passerar genom tre godtyckligt valda linjer. Utred frågan.