KTH, Matematik

Tentamen i Linjär algebra, SF1604, för F1 och D1, den 3:e juni, 2009.
OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betyg enligt följande tabell:

A	minst 35 poäng
B	minst 30 poäng
C	minst 25 poäng
D	minst 20 poäng
E	minst 15 poäng
Fx	13-14 poäng

Betyg Fx ger möjlighet till att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email.

Del I

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng).

(1) Betrakta följande mängder i $\mathbf{R}^3$:

$$A = \{(x, y, z) \text{ sådana att } y = x^2\}, B = \{(x, y, z) \text{ sådana att } 2y = x + z\}$$

(a) (1 p.) Är A och/eller B delrum till $\mathbf{R}^3$?
Låt $v = (x_1, y_1, z_1), w = (x_2, y_2, z_2)$ vara två element av A. Detta betyder att $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$. Det följer att $v+w \in A$ om och endast om $y_1+y_2 = x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2$, som inte gäller i allmänhet. Slutsatsen är att A inte är ett delrum.
Låt $v = (x_1, y_1, z_1), w = (x_2, y_2, z_2)$ vara två element av B, och $k, t \in \mathbf{R}$. Eftersom $2y_1 = x_1 + z_1$ och $2y_2 = x_2 + z_2$ är $2(ky_1 + ty_2) = (kx_1 + tx_2) + (kz_1 + tz_2)$ som bevisar att $kv + tw \in B$. Slutsatsen är att B är ett delrum.

(b) (2 p.) Om svaret är ja, bestäm en bas.
Varje element i B kan skrivas som: $(x, \frac{x+z}{2}, z) = x(1, \frac{1}{2}, 0) + z(0, \frac{1}{2}, 1)$. Dessutom är vektorerna $(1, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, 1)$ linjärt oberoende. Då är $\{(1, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, 1)$ en bas.

(2) (3p.) Givet är att :

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Bestäm:

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{pmatrix}$$

Matrisen

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{pmatrix}$$

kommer från matrisen

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

genom följande elementära radoperationer:

- addera 3 gången första raden till andra raden
- addera den första till den sista raden.

Då blir determinanten lika men 3 gånger determinanter av

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Svar: 3.

(3) (3 p.) Betrakta punkten $P = (1,1,1) \in \mathbf{R}^3$ och linjen $l \subset \mathbf{R}^3$: (med avseende till standardbasen)

$$l(x,y,z) = \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1-t \\ z &= 2t. \end{cases}$$

Betsäm planet genom P, som är vinkelrät mot l.

Normalvektorn till planet π ska vara parallel till riktningsvektorn till linjen l, d.v.s $(1,-1,2)$. Ekvationen till π blir då: $x - y + 2z = C$, för något $C \in \mathbf{R}$. Planet går genom P om $1 - 1 + 2 = C$ som ger $C = 2$.

Svar: $\pi : x - y + 2z = 2$.

(4) (3 p.) Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 105 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestam A^{95} och A^{112}

Egenvärden till A är $\lambda = 1, -1$, och egenvektorerna är respektive $(2,105), (0,1)$. Det följer att:

$$A = PDP^{-1}$$

där

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 105 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -105 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Då är $A^n = PD^nP^{-1}$. Efterson $D^n = D$ om n är udda och $D^n = I_2$ om n är jämnt så blir $A^{95} = A$, och $A^{112} = I_2$.

(5) Låt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ vara den linjära avbildning sådan att:

$$f(1,1,1) = (1,0,0,0), f(1,1,0) = (1,0,1,0), f(1,0,1) = (0,0,2,0).$$

(a) (1 p.)Bestäm $f(x,y,z)$ för varje $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, där (x,y,z) är koordinater med avseende till standardbasen.

Eftersom gäller att:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= -f(1,1,1) + f(1,1,0) + f(1,0,1) = (0,0,3,0), \\ f(0,1,0) &= -f(1,1,1) - f(1,0,1) = (1,0,-2,0), \\ f(0,0,1) &= -f(1,1,1) - f(1,1,0) = (0,0,-1,0) \end{aligned}$$

Vi kan då skriva matrisen till f med avseende till standardbasen och

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 3x - 2y - z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (2 p.) Bestäm en bas till $Ker(f)$ och $Im(f)$.

$$rang \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Det följer att $\dim(Im(f)) = 2$ och $\dim(Ker(f)) = 1$.

$$Ker(f) = \{(x,y,z), f(x,y,z) = (y,0,3x-2y-z,0) = (0,0,0,0)\}.$$

Vi har att $(x,y,z) \in Ker(f)$ om och endast om $y = 0, z = 3x$ som ger $Ker(f) = Span(1,0,3)$ och då är $(1,0,3)$ en bas till $Ker(f)$.

$$Im(f) = \{(w_1,w_2,w_3,w_4) = (y,0,3x-2y-z,0) = y(1,0,-2,0) + (z-3x)(0,0,-1,0)\}.$$

Då är $\{(1,0,-2,0),(0,0,-1,0)\}$ en bas till $Im(f)$.

DEL 2

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng).

(1) Bestäm dimensionen till lösningsmängden av följande system, för alla $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} ax & + & by & - & z & = & 1 \\ -x & + & by & & & = & 1 \\ 2x & + & ay & - & 2z & = & 1 \end{cases}$$

$$\text{låt } A = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Eftersom $det(A) = a(1-2b)$ har systemet en entydig lösning om $a \neq 0$, och $b \neq \frac{1}{2}$.
Om $a = 0$, då är systemet:

$$\begin{cases} & & by & - & z & = & 1 \\ -x & + & by & & & = & 1 \\ 2x & & & - & 2z & = & 1 \end{cases}$$

inte lösbart eftersom det ger $x = z, 2(x-z) = 1$.
Om $b = \frac{1}{2}$ då ska vi betrakta systemet:

$$\begin{cases} ax & + & \frac{1}{2}y & - & z & = & 1 \\ -x & + & \frac{1}{2}y & & & = & 1 \\ 2x & + & ax & - & 2z & = & 1 \end{cases}$$

Om $a \neq -1$ har systemet linjen $(x,y,z) = t(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1}, 1) + (0, 0\frac{3}{a+1}, 0)$ som lösningsmängd.
Om $a = -1$ har systemet linjen $(x,y,z) = t(1,2,0) + (0,-1,0)$ som lösningsmängd.
Svar:

$$\begin{array}{cc} \dim = 0 & \text{om } a \neq 0, b \neq \frac{1}{2} \\ \dim = -1 & \text{om } a = 0 \\ s\dim = 1 & \text{om } b = \frac{1}{2} \end{array}$$

(2) (3 p.) Låt $U_{a,b} = \{(a, 2a, b, 3b) \in \mathbf{R}^4\} \subset \mathbf{R}^4$, för $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Bestäm, om det finns, en linjär avbildning $\phi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, med $Ker\phi = Im(\phi) = U_{a,b}$.

$U_{a,b} = Span((1,2,0,0),(0,0,1,3))$. Vi kan komplettera vektorerna $(1,2,0,0),(0,0,1,3)$ till en bas till $\mathbf{R}^4$. Till exempel $(1,0,0,0 \notin Span((1,2,0,0),(0,0,1,3))$ och $(0,0,1,0) \notin Span((1,2,0,0),(0,0,1,3),(1,0,0,0))$ som ger basen $v_1 = (1,2,0,0), v_2 = (0,0,1,3), v_3 = (1,0,0,0), v_4 = (0,0,1,0)$.

Betrakta linjär avbildningen $\phi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, definierad av:

$$\phi(v_1) = \phi(v_2) = 0, \phi(v_3) = v_1, \phi(v_4) = v_2.$$

Man ser att $Ker(\phi) = Span(v_1, v_2) = U_{a,b}$, och att $Im(\phi) = Span(\phi(v_3), \phi(v_4)) = Span(v_1, v_2) = U_{a,b}$.

(3) (3 p.) Bestäm värdena på x, y, z sådana att matrisen $A = BC$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & z & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

är antisymmetrisk, d.v.s. $A^T = -A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1+x+y & 1+2x+y \\ y+z+1 & y+2z+1 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1+x+y & y+z+1 \\ 1+2x+y & y+2z+1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = -A \text{ om } \begin{cases} x+y & = & -1 \\ y+2z & = & -1 \\ 2x+2y+z & = & -2 \end{cases}$$

som har lösning $(x, y, z) = (0, -1, 0)$.

(4) (3 p.) Hitta en diagonalizerbar linjär avbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som har ett egenvärde λ lika med 1 med egenrum:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ sådana att } x + 2y + z = 0\}.$$

Observera first att $V_1 = Span((1, 0, -1), (0, 1, -2))$. Vectorerna $(1, 0, -1), (0, 1, -2)$ är linjärt oberoende och då är $\dim(V_1) = 2$.

Låt A vara avbildnings matris. Vi vet att det karakteristiska polynom är $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - a)$ för något $a \in \mathbf{R}$, eftersom f ska vara diagonalizerbar och $\dim(V_1) = 2$.

Dessutom motsvarar ekvationen $x + 2y + z = 0$ systemet

$$(A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man ser att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

har $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ och egenrummet till $\lambda = 1$ är lika med V_1.

Svar: $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, definierad som $f(x, y, z) = (x, y, x + 2y + 2z)$.

(5) (3 p.) Låt P_k vara vektorrummet av reella polynom av grad $\leq k$ och betrakta inreproduktten:

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad \text{för all } p, q \in P_3.$$

Bestämma projektionen av $f(x) = x^3$ på P_2.

Vi börjar med att beräkna an ortonormalt bas till P_2. Från basen $\{1, x, x^2\}$, genom Gram-Scmidt, så får man: $v_1 = 1, ||v_1||^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2$ och $< x, v_1 >= \int_{-1}^{1} tdt = 0$ som ger $v_2 = x$.

$< x^2, v_1 >= \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}, < x^2, v_2 >= \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0$ som ger $v_3 = x^2 - \frac{1}{3}$.

Efter man normerar vektorerna blir den ortonormala bas:

$$(u_1, u_2, u_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)).$$

Vi har att:

$$< f(x), u_1 >= \int_{-1}^{1} t^3(\frac{1}{\sqrt{2}})dt = 0, < f(x), u_2 >= \int_{-1}^{1} t^4 \sqrt{\frac{3}{2}} dt = \frac{\sqrt{6}}{5}, < f(x), u_3 >= \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2 - 1)dt = 0.$$

Det följer att:

$$proj_{P_2}(x^3) = < x^3, u_1 > u_1 + < x^3, u_2 > u_2 + < x^3, u_3 > u_3 = \frac{3}{5}x.$$

DEL 3

(1) (5 p.) Låt $D(\lambda) = \lambda I_n$, vara den $n \times n$ matris med alla termerna på diagonalen lika med λ och de andra termerna lika med 0 :

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Låt A vara en $n \times n$ matris. Visa att det finns ett $\lambda \in \mathbf{R}$ sådant att $A = D(\lambda)$ om och endast om $AC = CA$ för varje $n \times n$ matris C.

Om $A = \lambda I_n$ då är det klart att $AC = CA = \lambda C$ för varje $n \times n$ matris C.
Antar nu att A är en matris sådan att $AC = CA$ för varje $n \times n$ matris C.
Batrakta matriserna:

$$C_{lk} = (c_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{om } (i,k) = (l,k) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Notera att

$$C_{lk}A = (r_{ij}) = \begin{cases} r_{lj} = a_{kj} & \text{för } j = 1, \dots n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$AC_{lk} = (r_{ij}) = \begin{cases} r_{ik} = a_{il} & \text{för } i = 1, \dots n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Det följer att $a_{ij} = 0$ om $i \neq j$ och att $a_{ii} = \lambda$ för något $\lambda \in \mathbf{R}$ och $i = 1, \dots, n$.

(2) (5 p.) Betrakta följande $n \times n$ matris:

$$A(c_1, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Visa att $det(A(c_1, \dots, c_n)) \neq 0$ om $c_i \neq c_j$ för $i \neq j$.
Matricen $A(c_1, \dots, c_n)$ är matricen associerad till den linjära avbildning;

$$\phi : P_{n-1} \to \mathbf{R}^n, \phi(p) = (p(c_1), p(c_2), \dots, p(c_n))$$

Med avseende till standardbaser.

Observera att $Ker(\phi)$ består av polynom, p, av grad $\leq n-1$ med n stycken distinta rötter: $p(c_1) = \dots = p(c_n) = 0$ som är möjligt bara om $p = 0$.

Det följer att $Ker(\phi) = 0$ och därför $\dim(Im(\phi)) = n$, som ger $det(A(c_1, \dots, c_n) \neq 0$.