KTH, Matematik

Tentamen i Linjär algebra, SF1604, för F1 och D1, den 3:e juni, 2009.
OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betyg enligt följande tabell:

A	minst 35 poäng
B	minst 30 poäng
C	minst 25 poäng
D	minst 20 poäng
E	minst 15 poäng
Fx	13-14 poäng

Betyg Fx ger möjlighet att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email.

Del I

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng).

(1) Betrakta följande mängder i $\mathbf{R}^3$:

$$A = \{(x, y, z) \text{ sådana att } y = x^2\}, B = \{(x, y, z) \text{ sådana att } 2y = x + z\}$$

(a) (1 p.) Är A och/eller B delrum till $\mathbf{R}^3$?

(b) (2 p.) Om svaret är ja, bestäm en bas.

(2) (3 p.) Givet är att :

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Bestäm:

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{pmatrix}$$

(3) (3 p.) Betrakta punkten $P = (1, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$ och linjen $l \subset \mathbf{R}^3$: (med avseende på standardbasen)

$$l(x, y, z) = \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= 2t. \end{cases}$$

Bestäm planet genom P, som är vinkelrät mot l.

(4) (3 p.) Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 105 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm A^{95}.

(5) Låt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ vara den linjära avbildningen sådan att:

$$f(1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0), f(1, 1, 0) = (1, 0, 1, 0), f(1, 0, 1) = (0, 0, 2, 0).$$

(a) (1 p.)Bestäm $f(x, y, z)$ för varje $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, där (x, y, z) är koordinater med avseende på standardbasen.

(b) (2 p.) Bestäm en bas för $Ker(f)$ och $Im(f)$.

DEL 2

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng).

(1) (3 p.) Bestäm dimensionen för lösningsmängden till följande system, för alla $a, b \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} ax + by - z = 1 \\ -x + by = 1 \\ 2x + ay - 2z = 1 \end{cases}$$

(Kom ihåg att $\dim(\emptyset) = -1$ och att dimensionen av en punkt är lika med noll)

(2) (3 p.) Låt $U_{a,b} = \{(a, 2a, b, 3b) \in \mathbf{R}^4\} \subset \mathbf{R}^4$, för $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Bestäm, om det finns, en linjär avbildning $\phi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, med $Ker(\phi) = Im(\phi) = U_{a,b}$.

(3) (3 p.) Bestäm värdena på x, y, z sådana att matrisen $A = BC$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & z & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

är antisymmetrisk, d.v.s. $A^T = -A$.

(4) (3 p.) Hitta en inverterbar linjär avbildning $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som har ett egenvärde λ lika med 1 med egenrum:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ sådana att } x + 2y + z = 0\}.$$

(5) (3 p.) Låt P_k vara vektorrummet av reella polynom av grad $\leq k$ och betrakta inre produkten:

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \quad \text{för all } p, q \in P_3.$$

Bestäm projektionen av $f(x) = x^3$ på P_2.

DEL 3

(1) (5 p.) Låt $D(\lambda) = \lambda I_n$, vara den $n \times n$ matris med alla termerna på diagonalen lika med λ och de andra termerna lika med 0 :

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Låt A vara en $n \times n$ matris. Visa att det finns ett $\lambda \in \mathbf{R}$ sådant att $A = D(\lambda)$ om och endast om $AC = CA$ för varje $n \times n$ matris C.

(2) (5 p.) Betrakta följande $n \times n$ matris:

$$A(c_1, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Visa att $det(A(c_1, \dots, c_n)) \neq 0$ om $c_i \neq c_j$ för $i \neq j$.
(Hint: Man kan associera matrisen till någon linjär avbildning)