Matematiska Institutionen
KTH

**Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 17 april 2010 kl 09.00-14.00.**

---

# DEL I

1. En triangel i den tredimensionella rymden har sina hörn i punkterna $(1,1,1)$, $(2,4,3)$ och $(3,4,1)$ (ON-system).

   (a) (2p) Bestäm längden av triangels samtliga sidor.

   **Lösning:** Triangelns sidor är $(2,4,3)-(1,1,1) = (1,3,2)$, $(3,4,1)-(1,1,1) = (2,3,0)$ samt $(2,4,3)-(3,4,1) = (-1,0,2)$. Längden av en vektor $(x,y,z)$ är

   $$||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,$$

   och vi får då

   $$||(1,3,2)|| = \sqrt{14}, \qquad ||(2,3,0)|| = \sqrt{13}, \qquad ||(-1,0,2)|| = \sqrt{5}\ .$$

   (b) (2p) Bestäm arean av triangeln.

   **Lösning:** Arean av det parallellogram som spänns upp av två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är lika med $||\bar{u}\times\bar{v}||$. Formeln för beräkning av kryssprodukt ger nu att triangelns area blir

   $$\frac{1}{2}||(2,3,0)\times(-1,0,2)|| = \frac{1}{2}||(6,-4,3)|| = \frac{1}{2}\sqrt{61}\ .$$

   (c) (1p) Avgör om triangeln är en rätvinklig triangel, dvs om någon av vinklarna i triangeln är $90°$.

   **Lösning:** Om triangeln vore rätvinklig skulle dessa area vara lika med hälften av produkten av längderna av de sidor som bildar rät vinkel med varandra. Men två av talen $\sqrt{14}$, $\sqrt{13}$ och $\sqrt{5}$ går inte att multiplicera till $\sqrt{61}$. Så triangeln kan inte vara rätvinklig.

2. Betrakta ekvationssystemet

   $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 0 \end{cases}$$

   (a) (2p) Bestäm ett värde på talet $a$ för vilket ekvationssystemet ovan har oändligt många lösningar.

   **Lösning:** Vi utför Gauss elimination och räknar i tablå-form

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -a+2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -a+6 & 0 \end{array}\right)$$

   Det finns oändligt många lösningar när $-a+6=0$, dvs $a=6$.

(b) (1p) Ange samtliga lösningar till systemet för det värde på talet $a$ som du fann i deluppgiften ovan.

**Lösning:** Vi fortsätter med Gauss-Jordan i tablåräkningarna ovan:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Till vilket värde $t$ vi än väljer till $x_3$, dvs $x_3 = t$, hittar vi nu en lösning till systemet ovan nämligen

$$x_1 = -7t \qquad x_2 = 4t \ ,$$

så
**SVAR:** $(x_1, x_2, x_3) = t(-7, 4, 1)$.

(c) (2p) Finns det något värde på det reella talet $b$ för vilket systemet nedan har oändligt många lösningar

$$\begin{cases} bx_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & bx_2 & = & 0 \end{cases}$$

**Lösning:** Det homogena systemet har oändligt många lösningar precis då determinanten av systemets koefficientmatris är lika med noll. Vi finner att

$$\begin{vmatrix} b & -1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 1 \ .$$

Det finns inget reellt tal $b$ som gör detta uttryck till noll. Så
**SVAR:** Nej.

3. För den linjära avbildningen $A$ från $R^3$ till $R^3$ gäller att $A(1,1,1) = (1,2,-1)$, $A(0,2,1) = (2,1,2)$ och $A(1,2,2) = (0,3,-4)$.

(a) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen.

**Lösning:** Vi använder den sk Martins metod, och räknar då enligt nedan:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

och till slut tablån

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

ur vilken bilden av standardbasen framgår så avbildningens matris relativt standardbasen blir

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

(b) (1p) Bestäm $A(2,1,1)$.

**Lösning:** Vi multiplicerar vektorn med matrisen ovan

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så $A(2,1,1) = (3,3,1)$.

(c) (1p) Bestäm avbildningens kärna.

**Lösning:** Vi använder Martins metod även för detta. Utför vi Gausselimination till höger finner vi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Så bildrummet spänns upp av vektorerna $(1,2,-1)$ och $(0,-3,4)$ och har dimension 2, varur, enligt dimensionssatsen, följer att kärnan har dimension 1. Ur tablån framgår att vektorn $(-1,2,1)$ avbildas på nollvektorn, och därmed, då kärnans dimension är två, blir $(-1,2,1)$ en bas för kärnan, så $\ker(A) = \operatorname{span}\{(-1,2,1)\}$.

(d) (1p) Finns det någon vektor $\bar{y}$ i $R^3$ sådan att $A(\bar{x}) \neq \bar{y}$ för alla $\bar{x}$ i $R^3$.

**Lösning:** Ja, bildrummet har ju dimension 2, och är därmed ett ”äkta” delrum till det 3-dimensionella rummet $R^3$, och då finns det ju vektorer som inte tillhör bildrummet, tex varje $\bar{y}$ som inte tillhör $\operatorname{span}\{(1,2,-1),(0,-3,4)\}$.

---

# DEL II

4. Låt $L$ beteckna det delrum till $R^4$ som spänns upp av (genereras av) vektorerna $(0,1,1,1)$, $(1,0,2,1)$ och $(0,0,1,1)$ (ON-system)

(a) (3p) Bestäm projektionen av vektorn $(1,1,1,1)$ på $L$.

(b) (2p).Bestäm projektionen av $(1,1,1,1)$ på ortogonala komplementet till $L$.

**Lösning:** Vi löser först uppgift b). Ortogonala komplementet till $L$ utgörs av lösningarna till ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

som ju är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1,0,-1,1) \ ,$$

så vi får

$$L^{\perp} = \operatorname{span}\{(1,0,-1,1)\} \ .$$

Projektionen av den givna vektorn på $L^{\perp}$ blir då enligt projektionsformeln

$$\mathrm{Proj}_{L^{\perp}}((1,1,1,1)) = \frac{(1,1,1,1)\cdot(1,0,-1,1)}{(1,0,-1,1)\cdot(1,0,-1,1)}(1,0,-1,1) = \frac{1}{3}(1,0,-1,1)\ .$$

Nu är det så att varje vektor $\bar{w}$, på ett unikt sätt, kan skrivas som en summa av en vektor $\bar{u} \in L$ och en vektor $\bar{v} \in L^{\perp}$, där $\bar{u}$ resp $\bar{v}$ är vektorn $\bar{w}$'s projektion på $L$ resp $L^{\perp}$:

$$(1,1,1,1) = \mathrm{Proj}_L(1,1,1,1) + \mathrm{Proj}_{L^{\perp}}(1,1,1,1)\ .$$

Eftersom vi nu känner projektionen av $(1,1,1,1)$ på $L^{\perp}$ så får vi nu projektionen på $L$, som:

$$\mathrm{Proj}_L((1,1,1,1)) = (1,1,1,1) - \frac{1}{3}(1,0,-1,1) = \frac{1}{3}(2,3,4,2).$$

5. (a) (3p) Undersök om den kvadratiska formen

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

är positivt definit.

**Lösning:** Vi skriver den kvadratiska formen med hjälp av en symmetrisk matris $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Enligt känd sats är den kvadratiska formen positivt definit om och endast om samtliga egenvärden till matrisen $\mathbf{A}$ är positiva. Vi vet att egenvärdena är nollställen till ekvationen $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2-\lambda & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) + 4(\lambda - 2) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$$

Elementära lösningsmetoder av andragradsekvationer ger att detta polynom har nollställena $0$, $3$ och $6$. Eftersom ett av matrisens egenvärden är noll, kan den kvadratiska formen inte vara positivt definit.

(b) (2p) Visa att den kvadratiska formen

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2x_3\ ,$$

är en indefinit kvadratisk form.

**Lösning:** Eftersom t ex

$$Q(1,0,0) = 1 > 0\ , \qquad Q(0,1,-1) = -1 < 0\ ,$$

så antar den kvadratiska formen både positiva och negativa värden och är därför indefinit.

6. (5p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att talen i talföljden $a_n = 2\cdot 3^n + n^2$, där $n = 0,1,2,\ldots$, satisfierar rekursionsekvationen

$$a_{n+1} = 3a_n - 2n^2 + 2n + 1\ , \qquad n = 1,2,3,\ldots\ ,$$

med $a_0 = 2$.

**Lösning:** För det första finner vi att $2 \cdot 3^0 + 0^2 = 2$ så $a_0 = 2$ vilket ju är som det ska.

Nu visar vi nu, för tal $a_n$ som satisfierar rekursionsekvationen, att

$$a_n = 2 \cdot 3^n + n^2 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} + n + 1^2 \ .$$

Om $a_n = 2 \cdot 3^n + n^2$, så

$$3a_n - 2n^2 + 2n + 1 = 3 \cdot 2 \cdot 3^n + 3n^2 - 2n^2 + 2n + 1 =$$

$$= 2 \cdot 3^{n+1} + n^2 + 2n + 1 = 2 \cdot 3^{n+1} + (n+1)^2 = a_{n+1} \ .$$

Påståendet följer nu av induktionsprincipen.

---

# DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (a) (1p) Antag att $3 \times 3$-matrisen $\mathbf{Q}$ är en ortogonalmatris. Ange längden av vektorn $\mathbf{Q}(0\ 3\ 4)^T$, (ON-system).

   **Lösning:** För varje ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ gäller enligt sats i läroboken att

   $$||\mathbf{Q}\bar{x}^T|| = ||\bar{x}^T|| \ ,$$

   och alltså

   $$||\mathbf{Q}(0\ 3\ 4)^T|| = ||(0\ 3\ 4)^T|| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ .$$

   (b) (1p) En ortogonalmatris kan ha högst två olika egenvärden. Ange dessa. Motivera!

   **Lösning:** Egenvärdena till en ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ är antingen $1$ eller $-1$, ty från ovan får vi, för egenvärdet $\lambda$ till $\mathbf{Q}$ med egenvektorn $\bar{x}^T$, att

   $$||\bar{x}^T|| = ||\mathbf{Q}\bar{x}^T|| = ||\lambda\bar{x}^T|| = |\lambda| \cdot ||\bar{x}^T|| \ ,$$

   så $|\lambda| = 1$, vilket visar vårt påstående.

   (c) (3p) Ange, med motivering, samtliga symmetriska ortogonalmatriser som har egenvektorerna $(1, 1, 1)$, $(2, -1, -1)$ och $(1, -1, 0)$. (Poäng ges efter svarets kvalitet. Om du bara ger ett exempel på en sådan matris som uppfyller alla givna krav får du t ex 1p.)

   **Lösning:** Enligt sats i läroboken gäller för symmetriska matriser att egenvektorer som hör till skilda egenvärden är ortogonala. För de tre givna egenvektorerna gäller att $\bar{u} = (2, -1, -1)$ och $\bar{v} = (1, -1, 0)$ inte är ortogonala, medan $\bar{w} = (1, 1, 1)$ är ortogonal mot de bägge andra. Så vektorerna $(2, -1, -1)$ och $(1, -1, 0)$ hör till samma egenvärde. Enligt uppgift b) kan egenvärdena vara 1 eller $-1$. Det finns nu fyra fall:
   *Fall 1:* Samtliga egenvärden är 1 och $\mathbf{Q}\bar{u}^T = \bar{u}^T$, $\mathbf{Q}\bar{v}^T = \bar{v}^T$ och $\mathbf{Q}\bar{w}^T = \bar{w}^T$. Då är $\mathbf{Q}$ lika med identitesmatrisen $\mathbf{I}$, vars kolonner utgör en ON-bas, och således är en ortogonalmatris.
   *Fall 2:* Samtliga egenvärden är $-1$ och $\mathbf{Q}\bar{u}^T = -\bar{u}^T$, $\mathbf{Q}\bar{v}^T = -\bar{v}^T$ och $\mathbf{Q}\bar{w}^T = -\bar{w}^T$. Det är lätt att se att matrisen $-\mathbf{I}$ är lika med $\mathbf{Q}$ i detta fall, och även kolonnerna i $-\mathbf{I}$ utgör ju en ON-bas.

*Fall 3:* I detta fall gäller $\mathbf{Q}\bar{u}^T = \bar{u}^T$, $\mathbf{Q}\bar{v}^T = \bar{v}^T$ och $\mathbf{Q}\bar{w}^T = -\bar{w}^T$. Vi bestämmer nu matrisen $\mathbf{Q}$ med hjälp av Martins metod, där vi betraktar den linjära avbildning $Q_3$ som matrisen $\mathbf{Q}$ definierar:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

vilket ger matrisen

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ju är en symmetrisk ortogonalmatris.
*Fall 4:* I detta fall gäller $\mathbf{Q}\bar{u}^T = -\bar{u}^T$, $\mathbf{Q}\bar{v}^T = -\bar{v}^T$ och $\mathbf{Q}\bar{w}^T = \bar{w}^T$. Vi kan nu bestämma matrisen $\mathbf{Q}$ med hjälp av Martins metod, där vi betraktar den linjära avbildning $Q_4$ som matrisen $\mathbf{Q}$ definierar. Men vi observerar att denna linjära avbildning är lika med $-Q_3$ så vi får direkt matrisen

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

utan att behöva använda Martins metod.
Vårt svar utgörs alltså av de fyra matriserna ovan:
**SVAR:**

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. (a) (1p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna en $n \times n$-matris vars kolonner är linjärt oberoende. Visa att för varje positivt heltal $m$ så gäller att kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}^m$ är linjärt oberoende.

**Lösning:** Eftersom kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende så är $\mathbf{A}$'s determinant $r$ skild från noll, dvs $r \neq 0$. Prouktsatsen för determinanter, dvs $\det(\mathbf{CD}) = \det(\mathbf{C})\det(\mathbf{D})$ ger nu

$$\det(\mathbf{A}^m) = (\det(\mathbf{A}))^m = r^m \neq 0 \ .$$

Men att determinanten av $\mathbf{A}^m$ är skild från noll innebär att dess kolonner är linjärt oberoende.

(b) (2p) Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ beteckna en bas för det 4-dimensionella vektorrummet $V$, och låt $A$ beteckna den linjära avbildning för vilken

$$A(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 \ , \ A(\bar{e}_2) = \bar{e}_3 \ , \ A(\bar{e}_3) = \bar{e}_4 \ , \ A(\bar{e}_4) = \bar{0} \ .$$

Låt $A^k$ beteckna $A \circ A \circ A \circ \cdots \circ A$, ($k$ stycken $A : n$). Visa att

$$\dim(\ker(A)) = 1 \, , \ \dim(\ker(A^2)) = 2 \, , \ \dim(\ker(A^3)) = 3 \, , \ \dim(\ker(A^4)) = 4 \, .$$

**Lösning:** Låt $\bar{x}$ vara en godtycklig vektor i $V$:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 \ .$$

Vi får

$$A(\bar{x}) = x_1 A(\bar{e}_1) + x_2 A(\bar{e}_2) + x_3 A(\bar{e}_3) + x_4(\bar{e}_4) = x_1\bar{e}_2 + x_2\bar{e}_3 + x_3\bar{e}_4 \ ,$$

så $\mathrm{R}(A) = \mathrm{span}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, och $\dim(\mathrm{R}(A)) = 3$. Vidare

$$A^2(\bar{x}) = A(A(\bar{x})) = x_1 A(\bar{e}_2) + x_2 A(\bar{e}_3) + x_3 A(\bar{e}_4) = x_1\bar{e}_3 + x_2\bar{e}_4 \ ,$$

så $\mathrm{R}(A^2) = \mathrm{span}\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, och $\dim(\mathrm{R}(A)) = 2$. Vidare

$$A^3(\bar{x}) = A(A^2(\bar{x})) = x_1 A(\bar{e}_3) + x_2 A(\bar{e}_4) = x_1\bar{e}_4 \ ,$$

så $\mathrm{R}(A^2) = \mathrm{span}\{\bar{e}_4\}$, och $\dim(\mathrm{R}(A)) = 1$. Och till slut

$$A^4(\bar{x}) = A(A^3(\bar{x})) = x_1 A(\bar{e}_4) = x_1\bar{0} \ ,$$

så $\mathrm{R}(A^4) = \{\bar{0}\}$, och $\dim(\mathrm{R}(A)) = 0$. Vi använder nu dimensionssatsen

$$\dim(V) = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{R}(A)) \ ,$$

varur påståendet följer omedelbart då $\dim(V) = 4$.

(c) (2p) Är det sant för de linjära avblidningar $A$ av ett $n$-dimensionellt vektorrum $V$ på sig själv som är sådana att om

$$\dim(\ker(A)) = 1, \ \ \dim(\ker(A^2)) = 2, \ \ \dim(\ker(A^3)) = 3, \ldots, \ \dim(\ker(A^{n-1})) = n-1,$$

så gäller alltid att

$$\dim(\ker(A^n)) = n \ .$$

**Lösning:** Nej det är inte sant, ty definiera en linjär avbildning genom

$$A(\bar{e}_i) = \bar{e}_{i+1} \qquad \text{för} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \ ,$$

och $A(\bar{e}_n) = \bar{e}_n$. Då gäller

$$\mathrm{R}(A^k) = \mathrm{span}\{\bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_n\} \ ,$$

för $k = 1, 2, \ldots, n-1$ och $\mathrm{R}(A^k) = \mathrm{span}\{\bar{e}_n\}$ för $k = n, n+1, \ldots$. Använd nu dimensionssatsen som i deluppgift b).