Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604 för D, den 5 juni 2010 kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt10 adderas till skrivningspoängen.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. I vår vanliga 3-dimensionella rymd (ON-system):

   (a) (1p) Bestäm längden av vektorn $(7, 4, 3)$.

   Lösning $||(7, 4, 3)|| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{74}$

   (b) (1p) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1, -1, 1)$ och $(2, 3, 1)$.

   Lösning Då $(1, -1, 1) \cdot (2, 3, 1) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$ så är vinkeln 90 grader.

   (c) (1p) Bestäm $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0)$.

   Lösning $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0) = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1, 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$.

   (d) (1p) Bestäm ekvationen för ett plan π som förutom origo innehåller punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 1, 0)$.

   Lösning En normalvektor till planet ges av $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0)$ och som enligt föregående deluppgift är $(-3, 6, -3)$. Planets ekvation blir då
   SVAR: $-3(x - 0) + 6(y - 0) - 3(z - 0) = 0$, eller hyfsat $x - 2y + z = 0$.

   (e) (1p) Bestäm parameterformen för en linje genom punkten $(3, 2, 1)$ och som är parallell med planet π i föregående deluppgift.

   Lösning En vektor parallell med planet är t ex vektorn från origo till punkten $(1, 2, 3)$, dvs vektorn $(1, 2, 3)$. Planets parameterform blir då
   SVAR: $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 2, 3)$, (som ju inte är det enda svaret).

2. (a) (2p) Visa att vektorerna $\bar{e}_1 = (3,1,1)$, $\bar{e}_2 = (2,0,1)$ och $\bar{e}_3 = (2,1,2)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och att $\bar{f}_1 = (1,1,1)$, $\bar{f}_2 = (2,1,3)$ och $\bar{f}_3 = (2,1,2)$ utgör en annan bas för $\mathbb{R}^3$.

Lösning Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är en bas för $\mathbb{R}^3$ om och endast om determinanten, med dessa tre vektorer som kolonner, är skild från noll. Vi finner att

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ .$$

och

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ .$$

(b) (2p) Det finns ju en matris $\mathbf{T}$ sådan att om en godtycklig vektor $\bar{v}$ har koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i basen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och koordinaterna (y_1, y_2, y_3) i basen $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ så gäller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Bestäm matrisen $\mathbf{T}$.

Lösning Vi finner sambandet

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

varur vi sluter att

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Sedvanlig matrisinvertering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim$$

Den sökta matrisen $\mathbf{T}$ blir nu

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) (1p) Antag att $\bar{v}$ har koordinaterna $(1,-1,2)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Bestäm $\bar{v}$:s koordinater (y_1, y_2, y_3) i basen $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$.

Lösning Uppenbarligen gäller

$$\bar{v} = (3,1,1) - (2,0,1) + 2(2,1,2) = (5,3,4) = y_1(1,1,1) + y_2(2,1,3) + y_3(2,1,2) \ ,$$

varur vi får systemet

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 5 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 4 \end{cases}$$

som lätt löses med Gausselimination, och man får

SVAR: $(y_1, y_2, y_3) = (1, -1, 3)$

3. (5p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att $2^{6n} - 1$ är jämnt delbart med 7 för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning Påståendet är sant för $n = 1$ ty $2^6 - 1 = 63$ som ju är delbart med 7. Vi visar nu att om 7 delar $2^{6n} - 1$ så kommer 7 att dela $2^{6(n+1)} - 1$. Så vi förutsätter att $2^{6n} - 1 = 7k$ för något heltal k. Vi får då

$$2^{6(n+1)} - 1 = 2^{6n}2^6 - 1 = (7k + 1)2^6 - 1 = 7k \cdot 2^6 + 63 = 7(k \cdot 2^6 + 9) ,$$

dvs talet 7 kommer att dela talet $2^{6(n+1)} - 1$.

Enligt induktionsprincipen är nu påståendet visat för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

DEL II

4. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) (2p) Visa att det inte finns någon matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} .$$

Lösning Enklast är kanske att ansätta en matris $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Vi får då två linjära ekvationssystem att lösa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 = 3 \\ 7y_1 + 8y_2 + 9y_3 = 3 \end{cases}$$

med samma koefficientmatris, så vi kan lösa dem simultant i en tablå

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & 5 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Så vi ser från sista raden att systemet är olösbart eftersom summan av inga x_1, x_2 och x_3 aldrig kan bli -1.

(b) (2p) Om du byter ut elementet i en av matrisen $\mathbf{B}$:s 6 positioner mot ett annat visst tal b, så går ekvationen ovan att lösa. I vilken position (i, j) skall elementet ersättas mot vilket tal b

Lösning Systemet hade varit lösbart om vi istället hade fått en nolla i sista raden och kolonn nummer fyra. Detta hade inträffat om vi t ex hade ersatt elementet 5 i rad nummer tre och kolonn nummer 1 i matrisen $\mathbf{B}$ med 6.

(c) (1p) Du kan ta vilken som helst av de nio positionerna i matrisen $\mathbf{A}$ och ersätta elementet i den positionen med ett annat tal och då kommer systemet $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ att vara lösbart. Motivera varför.

Lösning Vi visar att om vi gör ett sådant byte så kommer determinaten av matrisen $\mathbf{A}$ att vara skild från noll. Och då är systemet lösbart med $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.
Vi ersätter nu elmentet a_{ij} i rad i och kolonn j med elementet $b = a_{i,j} + b'$ där $b' \neq 0$ och får en ny matris $\mathbf{A}'$. Vi utvecklar determinanten efter rad i och får, med A_{ij} betecknade algebraiska komplementen i $\mathbf{A}$

$$\det(\mathbf{A}') = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + b'A_{ij} = \det(\mathbf{A}) + b'A_{ij} = 0 + b'A_{ij}.$$

Det är lätt att kontrollera att samtliga nio algebraiska komplement $A_{i,j}$ är skilda från noll, och allså, för varje $b' \neq 0$ så $\det(\mathbf{A}') \neq 0$.

5. (5p) Bestäm matrisen, relativt standardbasen, för en linjär avbildning i vår vanliga 3-dimensionella rymd som avbildar planet med ekvationen $x + y - z = 0$ på planet med ekvationen $3x + y + z = 0$ samt linjen med parameterformen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ på linjen med prameterformen $(x, y, z) = t(1, 2, -1)$.

Lösning Beteckna den linjära avbildningen med A. Linjerna går genom origo, och avbildas då på varandra om linjernas riktningsvektorer avbildas på varandra, eller mer precist om

$$A(1, 1, 1) = (1, 2, -1)\ .$$

Nu kommer alla punkter på den ena linjen att avbildas på den andra linjen, ty

$$A(t(1, 1, 1)) = tA(1, 1, 1) = t(1, 2, -1)\ .$$

På samma sätt hanterar vi de bägge planen. Planet $x + y - z = 0$ har riktningsvektorerna $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$ och planet $3x + y + z = 0$ har riktningsvektorerna $(1, 0, -3)$ och $(0, 1, -1)$ så vi kan t ex välja

$$A(1, 0, 1) = (1, 0, -3)\ , \qquad A(0, 1, 1) = (0, 1, -1)\ .$$

Den sökta matrisen erhålls nu med hjälp av Martins metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Eftersom raderna till vänster om strecket i matrisen ovan är standardbasen, och vektorerna till höger om strecket är bilderna av dessa vektorer får vi nu

SVAR: Till exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

6. (5p) Avgör om den kvadratiska formen

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2$$

är positivt definit.

Lösning Vi skriver den kvadratiska formen

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Tecknet på egenvärdena till matrisen ovan avgör om matrisen är positivt definit. Så vi löser den karaktersitiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda) \ .$$

Så egenvärdena till matrisen är 0, 2 och 3, varför den kvadratiska formen inte är positivt definit (den är positivt semidefinit).

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (5p) Med hjälp av kunskaper från gymnasiets kurser Matematik A, B, C och D samt de verktyg du har fått med dig från kursen i Linjär algebra, skall du bestämma de reella tal a och b som gör värdet av integralen nedan så litet som möjligt:

$$\int_0^1 (t^3 - a - bt)^2 \mathrm{dt} \ .$$

Lösning Vi betraktar vektorrummet av funktioner kontinuerliga på intervallet 0 till 1, med den inre produkten

$$< f \mid g >= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{dt} \ .$$

Med

$$||f||^2 =< f \mid f >= \int_0^1 f(t)^2 \mathrm{dt} \ ,$$

har vi alltså till uppgift att bestämma a och b så att $||t^3 - (a+bt)||$ blir så liten som möjligt, vilket inträffar när $a + bt$ är projektionen av t^3 på $L = \mathrm{span}\{\ 1, t\ \}$. Vi söker alltså denna projektion.

Betsämmer först en ortogonalbas för L. Låter vi $\bar{e}_1 = 1$ och

$$\bar{e}_2 = t - \mathrm{Proj}_{\bar{e}_1}(t) = t - \frac{< t \mid 1 >}{< 1 \mid 1 >}1 = t - \frac{\int_0^1 t \cdot 1\mathrm{dt}}{\int_0^1 1 \cdot 1\mathrm{dt}}1 = t - \frac{1/2}{1}1 = t - \frac{1}{2} \ .$$

Nu har vi en ortogonalbas för L och finner enligt känd formel

$$\text{Proj}_L(t^3) = \frac{< t^3 \mid \bar{e}_1 >}{< \bar{e}_1 \mid \bar{e}_1 >}\bar{e}_1 + \frac{< t^3 \mid \bar{e}_2 >}{< \bar{e}_2 \mid \bar{e}_2 >}\bar{e}_2 = \frac{\int_0^1 t^3 \cdot 1\text{dt}}{\int_0^1 1 \cdot 1\text{dt}} \cdot 1 + \frac{\int_0^1 t^3 \cdot (t-1/2)\text{dt}}{\int_0^1 (t-1/2)\cdot(t-1/2)\text{dt}}(t-1/2)$$

Vanlig integration av polynom ger nu

$$\text{Proj}_L(t^3) = \frac{1/4}{1} \cdot 1 + \frac{1/5 - 1/8}{1/3 - 1/4 + 1/4}(t-1/2) = \frac{1}{4} + \frac{9}{40}(t-1/2) = \frac{11}{80} + \frac{9}{40}t\ .$$

SVAR: $a = 11/80$ och $b = 9/40$.

8. Matriserna i denna uppgift är samtliga kvadratiska $n \times n$-matriser.

   (a) (2p) Visa att om matrisen $\mathbf{B}$ har full rang, dvs rangen för matrisen $\mathbf{B}$ är n, så gäller för varje annan matris $\mathbf{A}$ att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har samma rang.

   Lösning Nollrummet till matrisen $\mathbf{AB}$ består av de vektorer $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$ sådana att $\mathbf{B}\bar{x}^T$ tillhör nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Om $\mathbf{B}$ har full rang kommer nollrummet till $\mathbf{AB}$ då att ha samma dimension som nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Enligt dimensionssatsen så har då matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{AB}$ att ha samma rang.
   Kolonnrummet till matrisen $\mathbf{BA}$ består av vektorerna $\mathbf{B}\bar{y}^T$ där $\bar{y}$ tillhör kolonnrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Eftersom $\mathbf{B}$ har full rang, och inte "släcker ut några dimensioner" kommer dimensionen av kolonnrummet till matrisen $\mathbf{BA}$ att vara lika med dimensionen hos kolonnrummet till matrisen $\mathbf{A}$. Enligt dimensionssatsen har då matriserna $\mathbf{BA}$ och $\mathbf{A}$ samma rang.
   Eftersom tydligen matriserna $\mathbf{BA}$ och $\mathbf{AB}$ har samma rang som matrisen $\mathbf{A}$ måste alla dessa ranger vara lika.

   (b) (1p) Bestäm två 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har olika rang.

   Lösning Låt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Då gäller

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   som har rang 1, och

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   som har rangen 2.

   (c) (2p) Givet en godtycklig matris $\mathbf{B}$. Karaktärisera de matriser $\mathbf{A}$ som är sådana att rangen för matrisen $\mathbf{AB}$ är lika med rangen för matrisen $\mathbf{BA}$.

   Lösning: För en godtycklig $n \times n$-matris $\mathbf{C}$ låt $N(\mathbf{C})$ beteckna matrisens nollrum och $R(\mathbf{C})$ beteckna matrisens kolonnrum, dvs mängden av alla vektorer $\bar{y}^T = \mathbf{C}\bar{x}^T$ där $\bar{x}$ tillhör $\mathbb{R}^n$. Vi vet att matrisen $\mathbf{C}$:s rang är lika med dimensionen av $R(\mathbf{C})$, och enligt dimensionssatsen gäller att

$$\dim(R(\mathbf{C})) = n - \dim(N(\mathbf{C}))\ .$$

Vi skall alltså karaktärisera de matriser $\mathbf{A}$ sådana att

$$\dim(N(\mathbf{AB})) = \dim(N(\mathbf{BA})) \ .$$

För den skull visar vi först för två kvadratiska matriser $\mathbf{C}$ och $\mathbf{D}$, vilka som helst att

$$\dim(N(\mathbf{CD})) = \dim(N(\mathbf{D})) + \dim(N(\mathbf{C}) \cap R(\mathbf{D})) \ .$$

För enkelhets skull betraktar vi de linjära avbildningar C och D av rummet $\mathbb{R}^n$ på sig självt som kan representeras med matriserna $\mathbf{C}$ resp $\mathbf{D}$.
Allmänt gäller för två linjära avbildningar C och D att $\bar{x}$ tillhör nollrummet till CD om $D(\bar{x})$ tillhör C:s nollrum.
Låt nu $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, ..., $\bar{f}_k$ vara en bas för snittet av C:s nollrum och D:s bildrum, och låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_k$ vara sådana att $D(e_i) = \bar{f}_i$, för $i = 1, 2, \ldots, k$. Eftersom vektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, ..., $\bar{f}_k$ är linjärt oberoende kommer också vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_k$ att vara linjärt oberoende, eftersom

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_k\bar{e}_k = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \bar{0} = D(\bar{0}) = D(\lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_k\bar{e}_k) = \lambda_1\bar{f}_1 + \cdots + \lambda_k\bar{f}_k \ .$$

Vi utvidgar nu dessa vektorer till en bas för $\mathbb{R}^n$ genom att lägga till vektorer, först med $\bar{e}_{k+1}$, ..., $\bar{e}_t$ som utgör en bas för nollrummet till D och sedan med $\bar{e}_{t+1}$, ..., $\bar{e}_n$ så att alla dessa vektorer bildar en bas för $\mathbb{R}^n$.
Betrakta nu en vektor $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n$. Då gäller att

$$CD(\bar{x}) = x_1CD(\bar{e}_1) + x_2CD(\bar{e}_2) + \cdots + x_nCD(\bar{e}_n) = x_{t+1}CD(\bar{e}_{t+1}) + \cdots + x_nCD(\bar{e}_n) \ .$$

Men vektorerna $CD(\bar{e}_{t+1})$, $CD(\bar{e}_{t+2})$, ..., $CD(\bar{e}_n)$ är linjärt oberoende, (ty om

$$\bar{0} = \lambda_{t+1}CD(\bar{e}_{t+1}) + \lambda_{t+2}CD(\bar{e}_{t+2}) + \cdots + \lambda_nCD(\bar{e}_n) \ ,$$

så skulle

$$\bar{0} = CD(\lambda_{t+1}\bar{e}_{t+1} + \lambda_{t+2}\bar{e}_{t+2} + \cdots + \lambda_n\bar{e}_n)$$

och då skulle $\lambda_{t+1}\bar{e}_{t+1} + \lambda_{t+2}\bar{e}_{t+2} + \cdots + \lambda_n\bar{e}_n$ tillhöra D:s nollrum och vore då en linjärkombination av vektorerna $\bar{e}_{k+1}$, ..., $\bar{e}_t$, vilket strider mot att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.) Så

$$CD(\bar{x}) = \bar{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_i = 0 \quad \text{för} \quad i = t+1,\ t+2,\ \ldots,\ n \ ,$$

eller ekvivalent

$$N(CD) = \mathrm{Span}\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_t\}$$

varur följer att

$$\dim(N(\mathbf{CD})) = \dim(N(\mathbf{D})) + \dim(N(\mathbf{C}) \cap R(\mathbf{D})) \ ,$$

eftersom $\dim(N(\mathbf{C}) \cap R(\mathbf{D})) = k$ och $\dim(N(\mathbf{D})) = t - k$.
Ur ovanstående likhet får vi nu att rangen för matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ är lika om

$$\dim(N(\mathbf{B})) + \dim(N(\mathbf{A}) \cap R(\mathbf{B})) = \dim(N(\mathbf{A})) + \dim(N(\mathbf{B}) \cap R(\mathbf{A}))$$