Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 14 mars 2011 kl 08.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt11 adderas till skrivningspoängen. Generellt gäller att bonuspoäng får användas vid ordinarie tentamen och vid första ordinarie omtentamenstillfälle för respektive sektion, vilket för sektion F liksom för sektion D är den 9 juni i år.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (5p) För ett eller flera värden på talet a kommer ekvationssystemet nedan att ha oändligt många lösningar. Bestäm dessa värden på a samt bestäm samtliga lösningar till systemet för dessa a-värden.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + az = 3 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

2. (5p) För den linjära avbildningen A på R^3 gäller att $A(1,1,1) = (1,2,3)$, $A(0,1,1) = (4,5,6)$ och $A(0,0,1) = (7,8,9)$. Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen, bestäm $A(3,2,1)$ samt bestäm avbidningens kärna.

3. (5p) Kolonnvektorn $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T$ är en egenvektor till matrisen $\mathbf{A}$ nedan,
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Bestäm matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer samt en matris $\mathbf{P}$ sådan att $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ är en diagonalmatris.

DEL II

4. (5p) I den vanliga 3-dimensionella rymden, och med koordinater givna i ett ON-system, står vi i punkten $P = (1, 2, 3)$ och betraktar planet π med ekvationen $2x + 3y - z = 13$. Vi skickar två ljusstrålar från P mot π, en som går vinkelrätt mot planet π och en som går parallellt med vektorn $(0, -1, 1)$. Dessa strålar träffar planet π i punkterna Q respektive R. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna P, Q och R.

5. (5p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att talen

$$a_n = 4^n + (-3)^n \ ,$$

satisfierar rekursionen

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}, \quad a_0 = 2, \ a_1 = 1$$

för samtliga naturliga tal $n = 0, 1, 2, \ldots$.

6. (5p) (ON-system) Låt L beteckna det delrum till R^5 som spänns upp av vektorerna $(1, 2, -1, 2, 1)$, $(1, 3, -2, 4, 5)$ och $(1, 0, 1, -2, -7)$, dvs

$$L = \text{Span}\{(1, 2, -1, 2, 1), (1, 3, -2, 4, 5), (1, 0, 1, -2, -7)\} \ .$$

Bestäm projektionen av vektorn $(1, 1, 1, 1, 1)$ på delrummet L.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$-matris.

   (a) (1p) Visa att om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen, så har $\mathbf{A}$ full rang.

   (b) (2p) Visa att om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, där $\mathbf{0}$ betecknar nollmatrisen, så är $\mathbf{A}$:s rang högst lika med $n/2$.

   (c) (2p) Om $\mathbf{A}^3 = 0$, vad kan då sägas om $\mathbf{A}$:s rang? Motivera ditt svar!

8. Det finns en inre produkt i R^3 sådan att $(1, 2, -1)$, $(2, 0, 1)$ och $(1, -1, 1)$ kommer att bilda en ON-bas i det inreproduktrum V som den inre produkten definierar.

   (a) (1p) Betrakta nu R^3 med denna nya inre produkt och låt $\bar{f}_1 = (2, -2, 2)$. Bestäm vektorer $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ sådana att $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ bildar en ortogonalbas i V.

   (b) (2p) Betrakta R^3 med denna nya inre produkt och låt $\bar{g}_1 = (1, 2, 3)$. Bestäm vektorer $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ sådana att $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ och $\bar{g}_3$ bildar en ortogonalbas i V.

   (c) (2p) Betrakta nu R^3 samt fyra godtyckliga vektorer $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ och $\bar{z}$ av vilka inga två är parallella med varandra. Kommer det då alltid att finnas en inre produkt i R^3 sådan att $\bar{u} \perp \bar{v}$ och $\bar{w} \perp \bar{z}$? Motivera ditt svar!