Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 9 juni 2011 kl 08.00-13.00.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. Bonuspoäng erhållna under läsåret 2010/11 kan användas vid detta tentamenstillfälle. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt **A** och **B** beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) (3p) Bestäm den till **A** inversa matrisen.

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 7 & -12 \end{array}\right]$$

SVAR:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -12 \\ 1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) (2p) Bestäm en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Lösning: Multiplikation med $\mathbf{A^{-1}}$ till höger ger

$$\mathbf{X} = \mathbf{BA^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & -12 \\ 1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ -1 & 10 & -17 \\ 1 & -7 & 13 \end{bmatrix}$$

2. (a) (2p) Skriv det komplexa talet $(1-i)^7(1+i)^{-5}$ på formen $a + ib$.

Lösning:

$$|(1-i)^7(1+i)^{-5}| = |(1-i)|^7|(1+i)|^{-5} = (\sqrt{2})^7(\sqrt{2})^{-5} = (\sqrt{2})^2 = 2\ .$$

$$\arg((1-i)^7(1+i)^{-5}) = 7 \cdot \arg(1-i) - 5 \cdot \arg(1+i) = 7 \cdot \frac{-\pi}{4} - 5 \cdot \frac{\pi}{4} = -3\pi$$

Ett komplext tal med beloppet 2 och argumentet -3π är

SVAR: -2.

(b) (3p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Lösning: För $n = 1$ är vänstra ledet lika med 0 och högra ledet lika med 0, så för detta värde på n så stämmer formeln.

Vi visar nu

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{3}\ .$$

Så antag att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Då får vi

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + (n+1)(n+1-1) = \frac{n(n^2-1)}{3} + (n+1)n =$$

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{3} + (n+1)n = n(n+1)(\frac{n-1}{3} + 1) = n(n+1)\frac{n+2}{3}$$

Men då

$$\frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{3} = \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1+1)}{3}\ ,$$

har vi alltså visat att implikationen ovan är sann.

Enligt induktionsaxiomet gäller nu den givna formeln för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Betrakta R^5 försett med den inre produkten

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 \ .$$

Låt L vara det delrum till R^5 som genereras av vektorerna $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(2, 1, 0, -1, -2)$ samt $(3, 1, 1, -1, -1)$.

(a) (2p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $L^\perp$ till L.

Lösning: Ortogonala komplementet till L erhålles från med nollrummet till matrisen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nollrummet till $\mathbf{L}$, dvs de vektorer $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_5)^T$ sådana att $\mathbf{L\bar{x}} = \bar{\mathbf{0}}$, bestämmes med Gausselimination

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Med $x_3 = t$, $x_4 = s$ och $x_5 = u$ som godtyckliga värden på x_3, x_4 och x_5 får vi att systemets lösningar är

$$\bar{x}^T = t(-1 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0) + s(0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0) + u(-1 \ \ 4 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1) \ .$$

Så de tre vektorerna

$$\bar{e}_1 = (-1, 2, 1, 0, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad \bar{e}_3 = (-1, 4, 0, 0, 1) \ ,$$

spänner upp $L^\perp$. Eftersom dessa vektorer också är linjärt oberoende så utgör de en bas för $L^\perp$.

(b) (1p) Utvidga denna bas till en bas för hela R^5.

Lösning: Radrummet till matrisen $\mathbf{L}$ är lika med L. Kalkylerna ovan visar att då utgör

$$\bar{e}_4 = (1, 0, 1, 0, 1), \quad \bar{e}_5 = (0, 1, -2, -1, -4)$$

en bas för L. Enligt känd sats i kursboken utgör vektorerna i en bas för L, tillsammans med vektorerna i en bas för $L^\perp$, en bas för hela rummet, så

SVAR: Vektorerna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_5$ ovan.

(c) (2p) Skriv vektorn $(1, 2, 3, 4, 5)$ som en summa av en vektor i L och en vektor i $L^\perp$.

Lösning: Om $\bar{a} = \bar{u} + \bar{v}$ där $\bar{u} \in L$ och $\bar{v} \in L^\perp$ så är $\bar{u} = \text{Proj}_L(\bar{a})$.

Vi bestämmer först en ortogonalbas $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ i L med hjälp av Gram-Scmidts metod:

Låt $\bar{f}_1 = \bar{e}_5 = (1,0,1,0,1)$ och

$$\bar{f}_2 = \bar{e}_5 - \frac{\bar{f}_1 \cdot \bar{e}_5}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}\bar{f}_1 = \bar{e}_5 - \frac{-6}{3}\bar{f}_1 = (2,1,0,-1,-2)$$

Nu har vi enligt formeln för projektion

$$\mathrm{Proj}_L(\bar{a}) = \frac{\bar{f}_1 \cdot \bar{a}}{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1}\bar{f}_1 + \frac{\bar{f}_2 \cdot \bar{a}}{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2}\bar{f}_2 = \frac{9}{3}\bar{f}_1 + \frac{-10}{10}\bar{f}_2 = (1,-1,3,1,5)$$

Nu till slut

$$(1,2,3,4,5) = (1,-1,3,1,5) + (0,3,0,3,0)\ .$$

vilket blir vårt svar.

DEL II

4. (ON-system) Planet π_1 innehåller punkterna $(1,1,3)$, $(1,2,4)$, $(2,-1,3)$ och planet π_2 innehåller linjen med parameterformen $(x,y,z) = (0,0,1) + t(1,1,3)$ samt punkten $(1,2,5)$.

   (a) (2p) Visa att planen π_1 och π_2 är parallella.

   Lösning: Beteckna de tre givna punkterna i planet π med P, Q och respektive R. Vi finner att $\overline{PQ} = (0,1,1)$ och $\overline{PR} = (1,-2,0)$. En normal $\bar{n}_1$ till π_1 blir då

$$\bar{n}_1 = \overline{PQ} \times \overline{PR} = (0,1,1) \times (1,-2,0) = (2,1,-1)\ .$$

   Nu till planet π_2. Låt $\bar{v} = (1,1,3)$, $S = (0,0,1)$ och $T = (1,2,5)$. Vi finner att $\overline{ST} = (1,2,4)$ och $\bar{v}$ är ickeparallella vektorer i π_2 och därför spänner upp π_2. Då dessa bägge vektorer är ortogonala mot normalen till planet π_1 så är de bägge planen parallella.

   (b) (1p) Bestäm avståndet mellan planen π_1 och π_2.

   Lösning: Avståndet mellan planen ges t ex av längden av projektion av vektorn $\overline{SP}$ på normalen $\bar{n}_1$ till planet π_1. Vi får

$$|\mathrm{Proj}_{\bar{n}_1}(\overline{SP})| = |\frac{\bar{n}_1 \cdot \overline{SP}}{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_1}\bar{n}_1| = |\frac{(2,1,-1)\cdot(1,1,2)}{(2,1,-1)\cdot(2,1,-1)}(2,1,-1)| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

   (c) (2p) Låt π beteckna det plan som ligger mitt emellan π_1 och π_2. Ange tre olika punkter i π.

   Lösning: Vi kan t ex ta mittpunkterna på sträckorna mellan punkten S och punkterna P, Q och R, dvs punkter med koordinaterna

$$(0,0,1) + \frac{1}{2}((1,1,3)-(0,0,1)) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},2),$$

$$(0,0,1) + \frac{1}{2}((1,2,4)-(0,0,1)) = (\frac{1}{2},1,\frac{5}{2}),$$

$$(0,0,1) + \frac{1}{2}((2,-1,3)-(0,0,1)) = (1,-\frac{1}{2},2),$$

5. (5p) Betrakta rummet $\mathcal{P}_n$ av polynom av grad högst lika med n och låt D beteckna derivering av polynom. Den linjära avbildningen A på $\mathcal{P}_n$ definieras genom

$$A(p(t)) = tD(p(t)) \ .$$

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen A.

Lösning: Vi ser omedelbart att, för $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$A(t^\lambda) = t \cdot \lambda t^{\lambda-1} = \lambda t^\lambda$$

Alltså är talen $0, 1, 2, \ldots, n$ egenvärden till A. Eftersom en linjär operator på ett vektorrum av dimension m kan ha högst m stycken olika egenvärden så kan det, emedan $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$, inte finnas fler egenvärden än de ovan angivna.

Egenvektorer som hör till skilda egenvärden är linjärt oberoende. Eftersom $\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$ så kan alltså inget av de $n+1$ olika egenrummen E_λ, för $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$, ha en dimension större än 1. Således

$$E_\lambda = \text{span}\{t^\lambda\}$$

för $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$.

6. (5p) Låt L vara ett 4-dimensionellt delrum till det 5-dimensionella vektorrummet V och låt A vara en linjär avbildning från V till vektorrummet W. Låt $A(L)$ beteckna det delrum till W som består av de vektorer $A(\bar{v})$ i W för vilka $\bar{v}$ tillhör L.

Vilka möjligheter finns det för dimensionen hos delrummet $A(L)$ till W om A:s kärna har dimensionen 1. För full poäng krävs att du ger ett bevis av ditt svar.

Lösning: Eftersom A:s kärna har dimension 1 så finns det två fall, *fall 1:* A:s kärna är ett delrum till L, och *fall 2:* A:s kärna har endast nollvektorn gemensam med L.

Fall 1: Låt $\bar{e}_1$ vara en bas för A:s kärna och utvidga till en bas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ för L. Varje vektor $\bar{x}$ i L är då en linjärkombination

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4$$

för några tal x_1, ..., x_4. Eftersom A är linjär så består $A(L)$ av alla linjärkombinationer

$$A(\bar{x}) = x_1A(\bar{e}_1) + x_2A(\bar{e}_2) + x_3A(\bar{e}_3) + x_4A(\bar{e}_4) \tag{1}$$

Eftersom $A(\bar{e}_1) = \bar{0}$ så består $A(L)$ i detta fall av alla linjärkombinationer av vektorerna $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ och $A(\bar{e}_4)$. Dessa tre vektorer är linjärt oberoende eftersom

$$x_2A(\bar{e}_2) + x_3A(\bar{e}_3) + x_4A(\bar{e}_4) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad A(x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4) = \bar{0}$$

och alltså

$$x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 \in \ker(A) \quad \Rightarrow \quad x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 = x_1\bar{e}_1 \ ,$$

så eftersom $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ är linjärt oberoende finner vi då att $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ 0ch $x_4 = 0$.

Delrummet $A(L)$ har alltså i detta fall dimension 3.

Fall 2: Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ vara en bas för L. Fortfarande gäller ekvation (1). Då är vektorerna $A(\bar{e}_1)$, $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ och $A(\bar{e}_4)$ linjärt oberoende eftersom

$$x_1A(\bar{e}_1)+x_2A(\bar{e}_2)+x_3A(\bar{e}_3)+x_4A(\bar{e}_4)=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad A(x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3+x_4\bar{e}_4)=\bar{0}$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3+x_4\bar{e}_4 \in \ker(A)\cap L=\{\ \bar{0}\ \}\ .$$

så eftersom $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ är linjärt oberoende finner vi att $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ 0ch $x_4=0$.

Eftersom vektorerna $A(\bar{e}_1)$, $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ och $A(\bar{e}_4)$ enligt ekvation (1) dessutom spänner upp $A(L)$ så bildar dessa vektorer en bas för $A(L)$. Dimension av $A(L)$ i detta fall är då lika med fyra.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) Du får reda på att ett givet linjärt ekvationssystem har bl a lösningarna $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,-1)$, $(x_1,x_2,x_3)=(1,-1,3)$ och $(x_1,x_2,x_3)=(2,1,0)$ samt att $(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)$ inte är en lösning. Bestäm systemets samtliga lösningar.

Lösning: Det gäller för varje linjärt ekvationssytem $\mathbf{A}\bar{x}^T=\bar{b}^T$ att om $\bar{x}_p$ är en lösning till systemet så består systemets samtliga lösningar av alla vektorer

$$\bar{x}=\bar{x}_p+\bar{x}_h\ ,$$

sådana att $\bar{x}_h$ löser motsvarande homogena system $\mathbf{A}\bar{x}^T=\bar{0}^T$. För system med tre obekanta x_1, x_2 och x_3 innebär detta, ur ett geometriskt perspektiv, att lösningsmängden antingen är en punkt, en linje, ett plan eller hela den 3-dimensionella rymden.

Eftersom de tre givna lösningarna inte ligger på en rät linje, emedan vektorerna

$$(1,2,-1)-(1,-1,3)=(0,3,-4) \quad \text{och} \quad (2,1,0)-(1,-1,3)=(1,2,-3)$$

inte är parallella, så är lösningsmängden varken en punkt eller en linje. Den kan ju inte heller vara hela rymden eftersom alla punkter inte ger lösningar till systemet. Lösningen är alltså ett plan genom punkten $(1,-1,3)$ och med $(0,3,-4)$ och $(1,2,-3)$ som riktningsvektorer för planet. Planet, respektive lösningarna till systemet, består då av punkterna

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,-1,3)+t(0,3,-4)+s(1,2,-3)\ ,$$

där $s,t\in R$

(b) (2p) Om du får reda på att ett linjärt ekvationssystem bl a har lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ samt att $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 3)$ och $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$ inte är lösningar så får du inte tillräckligt med information för att kunna bestämma systemets samtliga lösningar. Förklara varför.

Lösning: Vi ser lösningsmängden som ett geometriskt objekt, se ovan. Det finns linjer (och plan) genom punkten som inte innehåller de tre givna ickelösningarna till punkter. Så vi kan inte ens avgöra formen på lösningsmängden utifrån den givna informationen.

(c) (1p) Hur många ickelösningar till systemet i uppgiften ovan måste man ytterligare som minst ange för att kunna bestämma systemets samtliga lösningar.

Lösning: Minst oändligt många, ty det finns oändligt många linjer genom lösningspunkten $(1, 0, 1)$, och varje annan punkt kan ”blockera” högst en sådan linje. .

8. (5p) Du får följande information om matrisen $\mathbf{A}$:

(i) matrisen $\mathbf{A}$ är symmetrisk,

(ii) matrisen $\mathbf{A}$ har ett egenrum som genereras av vektorn $(1, 1, -2)$,

(iii) $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I}$ där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen.

Räcker denna information för att bestämma $\mathbf{A}\bar{x}^T$ för varje kolonnvektor $\bar{x}^T$?

Om du anser att informationen räcker skall du bevisa detta, dvs att informationen räcker för att bestämma $\mathbf{A}\bar{x}^T$ för varje kolonnvektor $\bar{x}^T$, samt beräkna $\mathbf{A}(1, 2, 3)^T$.

Om du anser att informationen inte räcker skall du komplettera med ytterligare information om matrisen $\mathbf{A}$ så att det går att bestämma $\mathbf{A}\bar{x}^T$ entydigt för varje kolonnvektor $\bar{x}^T$. (Poäng sätts efter kvaliteten på ditt svar.)

Lösning: För en egenvektor $\bar{x}$ till $\mathbf{A}$ med tillhörande egenvärde λ gäller

$$\bar{x} = \mathbf{I}\bar{x} = \mathbf{A}^4\bar{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathbf{A}\bar{x}))) = \ldots = \lambda^4\bar{x} ,$$

så varje egenvärde λ till $\mathbf{A}$ satifierar ekvationen $\lambda^4 = 1$. Denna binomiska ekvation har ju lösningarna

$$\lambda_k = e^{k\frac{\pi}{2}i}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 ,$$

dvs

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda - 3 = -i .$$

Men matrisen $\mathbf{A}$ förutsattes vara symmetrisk och då är alla $\mathbf{A}$:s egenvärden reella. Matrisen har alltså precis två egenvärden 1 och -1.

Antalet egenrum kommer att vara två, och dessa ligger ortogonalt till varandra. Detta ger att egenrummen är, som vi lätt ser

$$L = \text{Span}\{(1, 1, -2)\} \quad \text{resp} \quad L^{\perp} = \text{Span}\{(1, -1, 0), (1, 1, 1)\} .$$

Varje vektor $\bar{x}$ kan skrivas unikt som en summa $\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}$ av en vektor $\bar{a}$ i L och en vektor $\bar{b}$ i $L^{\perp}$. Så länge vi inte vet egenvärdet som hör till egenvektorn $(1, 1, -2)$ kan vi inte bestämma $\mathbf{A}\bar{x}$ för någon vektor $\bar{x}$.

Om vi får reda på att egenvärdet som hör till egenvektorerna i L t ex är 1, kommer egenvärdet som hör till vektorerna i $L^{\perp}$ att vara -1, och då får vi att

$$\mathbf{A}\bar{x} = \mathbf{A}\bar{a} + \mathbf{A}\bar{b} = \bar{a} - \bar{b}\ .$$