Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 9 juni 2011 kl 08.00-13.00.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. Bonuspoäng erhållna under läsåret 2010/11 kan användas vid detta tentamenstillfälle. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt **A** och **B** beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) (3p) Bestäm den till **A** inversa matrisen.

   (b) (2p) Bestäm en matris **X** sådan att **XA** = **B**.

2. (a) (2p) Skriv det komplexa talet $(1-i)^7(1+i)^{-5}$ på formen $a+ib$.

   (b) (3p) Visa, t ex med hjälp av ett induktionsbevis, att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

3. Betrakta R^5 försett med den inre produkten

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 \ .$$

   Låt L vara det delrum till R^5 som genereras av vektorerna $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(2, 1, 0, -1, -2)$ samt $(3, 1, 1, -1, -1)$.

   (a) (2p) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $L^\perp$ till L.

   (b) (1p) Utvidga denna bas till en bas för hela R^5.

   (c) (2p) Skriv vektorn $(1, 2, 3, 4, 5)$ som en summa av en vektor i L och en vektor i $L^\perp$.

DEL II

4. (ON-system) Planet π_1 innehåller punkterna $(1,1,3)$, $(1,2,4)$, $(2,-1,3)$ och planet π_2 innehåller linjen med parameterformen $(x,y,z) = (0,0,1) + t(1,1,3)$ samt punkten $(1,2,5)$.
   (a) (2p) Visa att planen π_1 och π_2 är parallella.
   (b) (1p) Bestäm avståndet mellan planen π_1 och π_2.
   (c) (2p) Låt π beteckna det plan som ligger mitt emellan π_1 och π_2. Ange tre olika punkter i π.

5. (5p) Betrakta rummet $\mathcal{P}_n$ av polynom av grad högst lika med n och låt D beteckna derivering av polynom. Den linjära avbildningen A på $\mathcal{P}_n$ definieras genom
$$A(p(t)) = tD(p(t)) \ .$$
Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen A.

6. (5p) Låt L vara ett 4-dimensionellt delrum till det 5-dimensionella vektorrummet V och låt A vara en linjär avbildning från V till vektorrummet W. Låt $A(L)$ beteckna det delrum till W som består av de vektorer $A(\bar{v})$ i W för vilka $\bar{v}$ tillhör L.

   Vilka möjligheter finns det för dimensionen hos delrummet $A(L)$ till W om A:s kärna har dimensionen 1. För full poäng krävs att du ger ett bevis av ditt svar.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) Du får reda på att ett givet linjärt ekvationssystem har bl a lösningarna $(x_1,x_2,x_3) = (1,2,-1)$, $(x_1,x_2,x_3) = (1,-1,3)$ och $(x_1,x_2,x_3) = (2,1,0)$ samt att $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,1)$ inte är en lösning. Bestäm systemets samtliga lösningar.
   (b) (2p) Om du får reda på att ett linjärt ekvationssystem bl a har lösningen $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,1)$ samt att $(x_1,x_2,x_3) = (1,2,-1)$, $(x_1,x_2,x_3) = (1,-1,3)$ och $(x_1,x_2,x_3) = (2,1,0)$ inte är lösningar så får du inte tillräckligt med information för att kunna bestämma systemets samtliga lösningar. Förklara varför.
   (c) (1p) Hur många ickelösningar till systemet i uppgiften ovan måste man ytterligare som minst ange för att kunna bestämma systemets samtliga lösningar.

8. (5p) Du får följande information om matrisen $\mathbf{A}$:

   (i) matrisen $\mathbf{A}$ är symmetrisk,

   (ii) matrisen $\mathbf{A}$ har ett egenrum som genereras av vektorn $(1,1,-2)$,

   (iii) $\mathbf{A}^4 = \mathbf{I}$ där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen.

   Räcker denna information för att bestämma $\mathbf{A}\bar{x}^T$ för varje kolonnvektor $\bar{x}^T$?

   Om du anser att informationen räcker skall du bevisa detta, dvs att informationen räcker för att bestämma $\mathbf{A}\bar{x}^T$ för varje kolonnvektor $\bar{x}^T$, samt beräkna $\mathbf{A}(1,2,3)^T$.

   Om du anser att informationen inte räcker skall du komplettera med ytterligare information om matrisen $\mathbf{A}$ så att det går att bestämma $\mathbf{A}\bar{x}^T$ entydigt för varje kolonnvektor $\bar{x}^T$. (Poäng sätts efter kvaliteten på ditt svar.)