SF 1604, 111215

① Låt $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 4 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Om $\det(M) \neq 0$ har $Mv = w$ en unik lösning för alla $w \in \mathbb{R}^3$.

$\det(M) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$;

Systemet har unik lösning om $a \neq 2$ för godtyckligt $b \in \mathbb{R}$.

Om $a = 2$ ger Gauss elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

vilket är lösbart omm $b = 2$.

$\therefore$ Systemet är lösbart om ~~(a, b)~~ $\underbrace{a \neq 2}_{b \text{ godtyckligt}}$

eller $a = 2$, $b = 2$.

Ej unik lösning $\Rightarrow a = 2$ (och $b = 2$);

Gauss elimination ger $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow y = t, \quad z = 2 - 2t, \quad x = -(y+z) = t - 2$

$\therefore$ Lösningarna då $a = b = 2$ ges av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(2) Låt $w_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}$, $w_4 = \begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$

och $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Låt $B_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ vara bas för $\mathbb{R}^4$
(uppenbart oberoende!)

och låt $B_2 = (w_1, w_2, e_2)$ vara bas för $\mathbb{R}^3$
(uppenbart att de spänner upp!)

Då $w_3 = 3w_1 - 2w_2$ och $w_4 = 2w_2 - 2w_1$

Ser vi att $M = [A]_{B_2,B_1} = \Big[[Av_1]_{B_2} \cdots [Av_4]_{B_2} \Big]$

$$= \Big[[w_1]_{B_2} \cdots [w_4]_{B_2} \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom M är på trappform ser vi omedelbart

att $\text{Range}(M) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$, och

att $\ker(M) = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\therefore$ I basen B_2 ~~R2 Range~~ ges en bas för Range(A) av (e_1, e_2), och (i basen B_1) ges en bas för $\ker(A)$ av $\left(\begin{bmatrix}-3\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-2\\0\\1\end{bmatrix} \right)$.

2, forts. Då $\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix} = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ (och $Av_i = w_i$ för $i = 1, \ldots, 4$)

är $\left[A \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[w_1 + w_2 + w_3 + w_4\right]_{B_2} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$.

Eftersom $\text{Range}(A) = \text{Span}(w_1, w_2)$

och $w_1, w_2, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ är oberoende

saknar $Ax = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ lösning.

---

(3) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$.

Inspektion $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$ är en rot.

Polynomdivision ger att $p_A(\lambda) = -(\lambda+1) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 3)$
$= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-3)$

$\therefore$ $\lambda = -1$ är en dubbelrot; $m_a(-1) = 2$.

$(A - (-1) \cdot I)x = 0$ ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \underbrace{m_g(-1)}_{} = \dim(E_{-1}) = 1$

$\therefore$ $m_g(-1) \neq m_a(-1)$ $\Rightarrow$ A ej diagonaliserbar.

4. Skärningen mellan de två sistnämnda planen fås genom att lösa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \quad y = t, \quad x = 3+t, \quad z = -1-2t$$

dvs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

För att en linje mellan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ skall vara parallell med $3x+2y-z=2$ (med normal $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) så måste

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0, \text{ dvs}$$

$$3 \cdot (2+t) + 2 \cdot (t-1) + (-1) \cdot (-1-2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 7t + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -5/7.$$

$\therefore$ Linjens riktning ges av $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-5}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\therefore$ Linjen, på parameterform, ges av

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}. \right\}.$$

(5)

$(2+3i)^2 = -5+12i$

$(2+3i)^3 = (-5+12i)(2+3i) = -46+9i$

Insättning i x^3+ax+b ger:

$$-46+9i + a(2+3i)+b=0$$

$$\iff \begin{cases} -46+2a+b=0 \\ 9+3a=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=-3, \quad b=52.$

Låt $g(x) = x^3-3x+52 =: (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$.

g har reella koefficienter och $\alpha_1 = 2+3i$

som rot $\Rightarrow \alpha_2 = 2-3i$ är en rot.

Då $(-\alpha_1)(-\alpha_2)(-\alpha_3) = 52$

får vi att $\alpha_3 = \dfrac{-52}{\alpha_1\alpha_2} = \dfrac{-52}{13} = -4.$

(6) Olikheten kan skrivas som

$$(*) \quad x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}(xy+yz+xz) \leq \frac{2}{3}(x+y+z).$$

dvs $(x\ y\ z)\, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \frac{2}{3} K\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

med $A=\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$ och $K=[1\ 1\ 1]$.

$\det(A-\frac{4}{3}I)=0$; vi finner $E_{4/3}$

genom att lösa $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{0}$;

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; lösningsrummet spänns

upp av $v_1'=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2'=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Gram-Schmidt $\Rightarrow$

$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är ON-bas för $E_{4/3}$.

$\operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3 \Rightarrow$

$\lambda_3=3-\lambda_1-\lambda_2=3-2\cdot 4/3=1/3$.

$A^t=A \Rightarrow E_{1/3}=E_{4/3}^{\perp}$; vi ser att $v_3'=v_1'\times v_2'=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

spänner upp $E_{1/3}$. Med $v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger

v_1, v_2, v_3 en ON-bas av egenvektorer för A.

Låt $P=\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, och introducera variabelbytet

$$v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=Pw$$

(*) är då ekvivalent med

(**) $\cancel{v^t A v \leq \frac{2}{3} K v}$

$$w^t P^t A P w \leq \frac{2}{3} K P w \quad \text{, dvs}$$

$$\frac{1}{3}\left(4a^2 + 4b^2 + c^2\right) \leq \frac{2}{3}[1\ 1\ 1]\, P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{, } \cancel{\text{dvs}} \iff$$

$$\frac{1}{3}\left(4a^2 + 4b^2 + c^2\right) \leq \frac{2}{3}\left[0\ 0\ 3/\sqrt{3}\right] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot c \,. \iff$$

~~Som dvs~~

$$\frac{1}{3}\left(4a^2 + 4b^2\right) + \frac{1}{3}\left(c^2 - 2\sqrt{3}c\right) \leq 0 \iff$$

$$\frac{1}{3}\left(4a^2 + 4b^2\right) + \frac{1}{3}\left((c-\sqrt{3})^2 - 3\right) \leq 0 \iff$$

$$\frac{a^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{b^2}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{(c-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2} \leq 1 \text{; En Ellipsoid!}$$

$\therefore$ Huvudaxlarna har längd $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$

och volymen ges av $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \pi \cdot \sqrt{3}$.

7a Då $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

får vi att

$$A^n\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = 2\cdot 1^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \to 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

då $n\to\infty$.

(26)

Låt $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

och $v_3 = w_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$v_1 \circ v_3 = v_2 \circ v_3 = 0 \implies v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)^{\perp}$.

Definiera en matris B genom att låta

$Bv_i = v_i \quad , i = 1,2, \qquad Bv_3 = \frac{1}{2} v_3$.

Då är $B^n w_1 = B^n (v_2 + v_3) = 1^n v_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n v_3 \to v_2$

då $n \to \infty$.

Låt $\hat{v}_1, \hat{v}_2$ vara ON-bas för $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$

och låt $\hat{v}_3 = v_3 / |v_3|$. Då är

$\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ en ON-bas för $\mathbb{R}^3$, med egenvärden $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 1/2$.

Dessutom är $B\hat{v}_i = 1 \cdot \hat{v}_i$ för $i = 1, 2$

och $B\hat{v}_3 = \frac{1}{2} \hat{v}_3$, dvs B har en ON-bas

av egenvektorer $\implies B^t = B$. (spektralsatsen!).

Eftersom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är nollskiljda är $\det(B) \neq 0$,

dvs B är icke-singulär.

Den konstruerade matrisen B uppfyller

alla önskade egenskaper.

Svar: Ja, B existerar.

⑧ Låt $\cancel{W}$ = Range(A), W = ker(A).

Minsta ~~kvadrat~~kvadrat-lösning till

$Ax = b$ ges av lösning till

$Ax = b_{//}$ där $b_{//} = \text{Proj}_W(b)$.

De två första $\overbrace{\text{kolonnerna}}^{v_1, v_2}$ i A är ortogonala och spänner upp Range(A)

$$\Rightarrow b_{//} = \frac{b \cdot v_1}{|v_1|^2} \cdot v_1 + \frac{b \cdot v_2}{|v_2|^2} \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mha Gausselimination får vi att lösningen till $Ax = b_{//}$ ges av

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha w_1 - \beta w_2 \quad \text{där} \quad \ker(A) = \text{Span}(w_1, w_2)$$

och $w_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, (och $w_1 \perp w_2$) dvs w_1, w_2 är ortogonal bas för W.

Det x för vilket $|x|$ minimeras fås (projektion igen!) då $\alpha = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w_1}{|w_1|^2}$, $\beta = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot w_2}{|w_2|^2}$

dvs $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/6$.

$$\therefore \; x_{\text{optimal}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{6} w_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$