Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 15 december 2011 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. Bonuspoäng erhållna under läsåret 2011 kan användas vid detta tentamenstillfälle, och enligt de regler som gällde när bonuspoängen erhölls. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (5p) Bestäm samtliga reella tal a och b för vilka nedanstående ekvationssystem i de obekanta variablerna x, y och z är lösbart. För de tal a och b sådana att systemet har mer än en lösning skall dessa lösningar bestämmas.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ ax & + & 4y & + & 3z & = & 2 \\ & & ay & + & z & = & b \end{array}\right.$$

2. (5p) Den linjära avbildningen A från R^4 till R^3 är entydigt bestämd av att

$$\begin{array}{rcl} A(1,0,0,0) & = & (0,1,1), \\ A(1,1,0,0) & = & (1,2,0), \\ A(1,1,1,0) & = & (-2,-1,3), \\ A(1,1,1,1) & = & (2,2,-2). \end{array}$$

Bestäm avbildningens matris relativt bassystem som du får välja själv, men som du givetvis måste ange. Bestäm också baser för avbildningens bildrum och nollrum. Du skall också bestäm $A(4,3,2,1)$, samt samtliga vektorer i R^4 som avbildas på vektorn $(3,3,3)$ (om det finns några).

3. (5p) Nedanstående matris går inte att diagonalisera. Förklara varför.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

DEL II

4. (5p) (ON-system) Beskriv på parameterform den linje som är parallell med planet $3x + 2y - z = 2$, passerar genom punkten $(1, 1, 0)$ och träffar skärningslinjen mellan planen $x + y + z = 2$ och $x - y = 3$.

5. (5p) Bestäm reella tal a och b så att det komplexa talet $2 + 3i$ blir en rot till ekvationen $x^3 + ax + b = 0$ samt bestäm samtliga rötter.

6. (5p) (ON-system) Volymen av en ellipsoid är lika med $4\pi abc/3$, där a, b och c är lika med ellipsoidens radier, dvs de halva längderna av ellipsoidens huvudaxlar. Visa att de punkter (x, y, z) som satisfierar nedanstående olikhet utgör en ellipsoid och bestäm dess volym

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{2}{3}(xy + xz + yz + x + y + z).$$

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) Vektorerna $(2, 1)$ och $(1, -2)$ är egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdena $\lambda = 1$ respektive $\lambda = 1/2$. Förklara varför

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) (3p) Undersök om det finns någon ickesingulär symmetrisk matris $\mathbf{B}$ sådan att

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{B}^n \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

8. (5p) En minsta kvadratlösning till $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ säges vara optimal om $||\bar{x}||$ är minimal. Finn alla optimala minsta kvadratlösningar till $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ då

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$