Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 15 mars 2012
kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Generellt gäller vid kursen SF1604 för F och D att bonuspoäng får användas vid det första ordinarie tentamenstillfället och vid första ordinarie omtentamen, dvs för F vid decembertentan och junitentan samt för D vid marstentan och junitentan.

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (ON-system) Låt $P=(1,2,1)$, $Q=(3,1,2)$ och $R=(0,3,a)$ vara tre punkter i vanliga 3-dimensionella rymden.

   (a) (2p) Bestäm det reella talet a så att $\overline{PQ}$ och $\overline{PR}$ blir sidor i en rektangel.

   Lösning: Vi finner att $\overline{PQ}=(2,-1,1)$ och $\overline{PR}=(-1,1,a-1)$. De är vinkelräta om $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=0$, dvs

   $$0=(2,-1,1)\cdot(-1,1,a-1)=-2-1+(a-1)=a-4.$$

   Så

   SVAR: $a=4$.

   (b) (1p) Bestäm det fjärde hörnet S i rektangeln.

   Lösning: För det fjärde hörnet S gäller att $\overline{QS}=\overline{PR}$, så koordinaterna för S är med $a=4$

   SVAR: $(3,1,2)+(-1,1,a-1)=(2,2,5)$.

(c) (2p) Bestäm rektangelns area.

Lösning: Arean av en rektangel är ju lika med "basen" multiplicerad med "höjden" dvs $||\overline{PQ}|| \cdot ||\overline{PR}||$, som med $a = 4$ blir

SVAR: $||(2,-1,1)|| \cdot ||(-1,1,3)|| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+3^2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{11}$

2. (5p) Låt $\bar{e}_1 = (1,2,1,-1,2)$, $\bar{e}_2 = (3,5,2,1,0)$ och $\bar{e}_3 = (1,0,1,0,1)$ vara tre vektorer i R^5. Visa att dessa tre vektorer är linjärt oberoende. Bestäm också två vektorer $\bar{e}_4$ och $\bar{e}_5$ så att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ och $\bar{e}_5$ bildar en bas för R^5.

   Lösning: Vi placerar de tre givna vektorerna som kolonner i en matris och kompletterar med två ytterligare kolonner till en kvadratisk matris vars determinant är skild från noll:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{utv. efter kolonn 3 och 4}\} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

   De fem kolonnerna i determinanten av ordning fem är linjärt oberoende, eftersom determinanten är skild från noll. Ingen icketrivial linjärkombination av dessa blir då lika med noll, och samma sak gäller då automatiskt för de tre första kolonnerna. Därmed har vi visat att de givna $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ tillsammans med $\bar{e}_4 = (0,0,0,1,0)$ och $\bar{e}_5 = (0,0,0,0,1)$ bildar en bas för R^5 samt att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ är linjärt oberoende.

3. (5p) Nedanstående matris **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   har precis två olika egenvärden λ_1 och λ_2, varav $\lambda_1 = 2$. Vidare är kolonnmatrisen $(1\ \ 1\ \ 1)^T$ en egenvektor till **A**.

   Gör en ortogonal diagonalisering av matrisen **A**.
   (**Anm.** Du kan få poäng, dock ej 5p, för dellösningar av uppgiften.)

   Lösning: Eftersom

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   så är det andra egenvärdet lika med $\lambda_2 = 11$.

Vi söker egenvektorer till egenvärdet $\lambda_1 = 2$ och har då att lösa det homogena systemet

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 3 & 3 \\ 3 & 5-2 & 3 \\ 3 & 3 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dvs} \quad 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0.$$

Egenvektorerna som är lösningar till detta system utgör egenrummet

$$E_2 = \text{span}\{(1 \;\; 0 \;\; -1)^T, (1 \;\; -1 \;\; 0)^T\}.$$

Egenrummet E_{11} har vi redan, det spänns upp av egenvektorn $\bar{e}_1 = (1 \;\; 1 \;\; 1)^T$.

Vi bestämmer nu en ON-bas av egenvektorer. Med $\bar{f}_1 = (1/\sqrt{3} \;\; 1/\sqrt{3} \;\; 1\sqrt{3})^T$, och $\bar{f}_2 = (1/\sqrt{2} \;\; 0 \;\; -1/\sqrt{2})^T$ har vi två egenvektorer av längd ett och som är ortogonala, $\bar{f}_1 \in E_{11}$ och $\bar{f}_2 \in E_2$. Egenrummen är ortogonala mot varandra så väljer vi $\bar{f}_3 = \bar{f}_2 \times \bar{f}_1 = (1/\sqrt{6} \;\; -2/\sqrt{6} \;\; 1/\sqrt{6})^T$ så är $\bar{f}_3$ en vektor i E_2 och alltså en egenvektor hörande till egenvärdet 2, som dessutom har längd ett och som är ortogonal mot både $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$.

Receptet för en ortogonal diagonal diagonalisering ger nu

SVAR:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

DEL II

4. (5p) En talföljd a_0, a_1, a_2, ... definieras rekursivt genom

$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2} \qquad \text{för} \quad n = 2, 3, ...$$

och $a_0 = 2$, $a_1 = 3$. Visa med ett induktionsbevis att $a_n = 5^n + (-2)^n$ för $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Lösning: Eftersom $5^0 + (-2)^0 = 2$ och $5^1 + (-2)^1 = 3$ så gäller att $a_n = 5^n + (-2)^n$ för $n = 0, 1$.

Vi antar nu att $a_n = 5^n + (-2)^n$ för $n = 0, 1, \ldots, k$. Då får vi att

$$a_{k+1} = 3a_k + 10a_{k-1} = 3(5^k + (-2)^k) + 10(5^{k-1} + (-2)^{k-1}) =$$

$$(15 + 10)5^{k-1} + (-6 + 10)(-2)^{k-1} = 5^2 \cdot 5^{k-1} + (-2)^2(-2)^{k-1} = 5^{k+1} + (-2)^{k+1},$$

dvs vi får att även $a_{k+1} = 5^{k+1} + (-2)^{k+1}$.

Av induktionsprincipen följer då att $a_n = 5^n + (-2)^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. (5p) För vilket, eller vilka värden på det reella talet a gäller att linjerna med parameterformerna $(x, y, z) = (2, 3, 1) + t(2, -1, 1)$ respektive $(x, y, z) = (a, 1, 1) + t(1, 2, 1)$ ligger i samma plan.

Lösning: Eftersom linjerna inte är paralella så ligger linjerna i samma plan om och endast om de skär varandra, dvs då det finns tal t och s sådana att

$$(2, 3, 1) + t(2, -1, 1) = (a, 1, 1) + s(1, 2, 1),$$

eller ekvivalent

$$t(2, -1, 1) - s(1, 2, 1) = (a - 2, -2, 0).$$

Vi undersöker nu när detta linjära ekvationssystem för s och t går att lösa:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 2 & -1 & a-2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} 0 & -5 & a-6 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} 0 & 0 & a-8/3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Systemet är lösbart om och endast om $a - 8/3 = 0$ så

SVAR: $a = 8/3$.

6. (5p) Låt A och B beteckna linjära avbildningar från R^3 till R^3 sådana att

$$A(1, 2, 1) = (2, 1, 4), \qquad A(0, 2, 3) = A(1, 1, 0) = (5, 2, 1),$$

och

$$B(1, 2, 1) = (3, 0, 2), \qquad B(0, 2, 3) = B(1, 1, 0) = (0, 1, 2).$$

Beskriv, på ett "lämpligt" sätt, matriserna relativt standardbasen för samtliga de linjära avbildningar X från R^3 till R^3 som är sådana att $X \circ A = B$.

Lösning: Om $X \circ A = B$ gäller att

$$(3, 0, 2) = B(1, 2, 1) = X \circ A(1, 2, 1) = X(A(1, 2, 1)) = X(2, 1, 4)$$

och

$$B(1, 1, 0) = (0, 1, 2) = B(0, 2, 3) = X \circ A(0, 2, 3) = X(A(0, 2, 3)) = X(5, 2, 1).$$

Av detta följer att $X \circ A = B$ om och endast om $X(5, 2, 1) = (0, 1, 2)$ och $X(2, 1, 4) = (3, 0, 2)$.

Vi kommer att använda oss av att en linjär avbildning är entydigt bestämd av dess bild av en samling basvektorer.

Vektorerna $(5, 2, 1)$, $(2, 1, 4)$ och $(0, 0, 1)$ bildar en bas för R^3. Om vi nu definierar X av att $X(5, 2, 1) = (0, 1, 2)$, $X(2, 1, 4) = (3, 0, 2)$ och $X(0, 0, 1) = (a, b, c)$ så kommer

$$X \circ A(1, 2, 1) = B(1, 2, 1), \quad X \circ A(0, 2, 3) = B(0, 2, 3), \quad X \circ A(1, 1, 0) = B(1, 1, 0),$$

för varje val av vektor (a, b, c), dvs $X \circ A = B$, eftersom $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 3)$ och $(1, 1, 0)$ bildar en bas för R^3. Några fler möjligheter för X finns inte enligt vårt första resonemang.

Vi bestämmer nu matrisen till X med hjälp av Martins metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & -a & 1-b & 2-c \\ 2 & 1 & 0 & 3-4a & -4b & 2-4c \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7a-6 & 1+7b & 7c-2 \\ 2 & 1 & 0 & 3-4a & -4b & 2-4c \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7a-6 & 1+7b & 7c-2 \\ 0 & 1 & 0 & 15-18a & -2-18b & 6-18c \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c \end{array}\right)$$

SVAR: Matriserna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7a-6 & 15-18a & a \\ 7b+1 & -2-18b & b \\ 7c-2 & 6-18c & c \end{pmatrix}$$

för varje val av talen a, b och c.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Betrakta de två delrummen

$$L_1 = \text{span}\{(2\ \ 1\ \ 0)^T, (0\ \ -1\ \ 1)^T\}, \qquad L_2 = \text{span}\{(1\ \ 0\ \ -1)^T, (1\ \ 2\ \ 0)^T\},$$

och delrummet $L_3 = \text{span}\{(1\ 1\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T\}$ till R^3, samt de två delrummen

$$M_1 = \text{span}\{(3\ \ 4\ \ 5)^T, (3\ \ 4\ \ -5)^T\}, \qquad M_2 = \text{span}\{(4\ \ -3\ \ 2)^T, (-4\ \ 3\ \ 2)^T\}.$$

(a) (3p) Bestäm en ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ med $\det(\mathbf{Q}) = 1$ och som är sådan att den avbildar L_1 på M_1 och L_2 på M_2, dvs

$$\bar{v} \in L_i \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Q}\bar{v} \in M_i, \quad \text{för} \quad i = 1, 2.$$

Lösning: För ortogonalmatriser $\mathbf{Q}$ gäller att $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ så

$$1 = \det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{Q})$$

så $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$, vilket torde vara känt från läroboken.

Om vektorernas koordinater är givna i ett ON-system så gäller för varje ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ att $||\mathbf{Q}\bar{x}|| = ||\bar{x}||$ för varje vektor $\bar{x}$, samt att vinkeln mellan $\mathbf{Q}\bar{x}$ och $\mathbf{Q}\bar{y}$ är densamma som vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$. Så ortogonalmatriser avbildar ON-baser på ON-baser under förutsättning att standaradbasen är en ON-bas, dvs koordinaterna är givna i ett ON-system. Så vi inför standardskalärprodukten i R^3 och utnyttjar att $\mathbf{Q}$ då avbildar ON-baser på ON-baser.

För den avbildning vi söker måste skärningslinjen mellan L_1 och L_2 avbildas på skärningslinjen mellan M_1 och M_2.

De givna 2-dimensionella delrummen till R^3 beskriver vi nu med hjälp av deras ekvationer, vilka fås ur planens normaler: L_1 har ekvationen $-x+2y+2z=0$, L_2 har ekvationen $2x-y+2z=0$, M_1 har ekvationen $4x-3y=0$ och M_2 har ekvationen $3x+4y=0$.

En riktningsvektor för skärningslinjen mellan L_1 och L_2 kan vi få antingen genom att lösa systemet $-x+2y+2z=0$ och $2x-y+2z=0$, eller genom att ta kryssprodukten mellan planens normaler. Denna skärningslinje har parameterformen

$$(x,y,z)=t(2,2,-1).$$

En ON bas för detta 1-dimensionella delrum är då $\bar{e}_1=(2/3,2/3,-1/3)$. Skärningslinjen mellan M_1 och M_2 beräknas med samma metod till

$$(x,y,z)=t(0,0,1).$$

med ON-bas $\bar{f}_1=(0,0,1)$ (alternativt $\bar{f}_1=(0,0,-1)$).

Vi kompletterar nu med basvektorer $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ så att $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ bildar en ON-bas för L_1, $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_3$ bildar en ON-bas för L_1, $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$ bildar en ON-bas för M_1, samt $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_3$ bildar en ON-bas för M_2.

Vektorn $\bar{e}_2$ skall vara ortogonal mot $\bar{e}_1$ och L_1:s normal, och motsvarande för de andra basvektorerna i ON-baserna. Vi finner då t ex med hjälp av kryssprodukten att vi kan låta

$$\bar{e}_2=(2/3,-1/3,2/3),\qquad \bar{e}_3=(-1/3,2/3,2/3).$$

och

$$\bar{f}_2=(3/5,4/5,0),\qquad \bar{f}_3=(-4/5,3/5,0).$$

Återigen, ON-baser avbildas på ON-baser av ortogonalmatriser, så från ovan har vi att en ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ avbildar L_1 på M_1 och L_2 på M_2 om och endast om $\mathbf{Q}\bar{e}_i=\pm\bar{f}_i$, för $i=1,2,3$. Det finns alltså totalt 8 möjliga ortogonalmatriser $\mathbf{Q}$ som löser vårt problem om man bortser från kravet att matrisens determinant skall vara lika med 1.

Vi prövar med att låta $\mathbf{Q}\bar{e}_i=+\bar{f}_i$, för $i=1,2,3$. Vi får då att

$$\mathbf{Q}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&3&-4\\0&4&3\\5&0&0\end{pmatrix}\tag{1}$$

Men

$$\det(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix})=-1,\quad\text{och}\quad \det(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&3&-4\\0&4&3\\5&0&0\end{pmatrix})=1$$

vilket ger att

$$\det(\mathbf{Q})\cdot(-1)=1$$

varur vi ser att $\det(\mathbf{Q})$ är lika med -1.
Vi låter nu i stället $\mathbf{Q}\bar{e}_1 = -\bar{f}_1$. Då kommer determinanten av matrisen till höger i ekvationen (1) att vara lika med -1 och vi får att $\det(\mathbf{Q}) = 1$.
Vi utnyttjar nu det faktum att samtliga matriser ovan är ortogonalmatriser, vilket gör det enkelt att lösa ut $\mathbf{Q}$, (eftersom inversen till en ortogonalmatris är dess transponat, och produkten av ortogonalmatriser är en ortogonalmatris):

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 11 & -2 \\ 5 & 2 & 14 \\ -10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

SVAR:

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & -11 & -2 \\ 5 & 2 & 14 \\ -10 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) (1p) Hur många olika ortogonalmatriser $\mathbf{Q}$ finns det som löser uppgiften ovan? (En kortfattad motivering räcker.)

Lösning: Det ortogonalmatriser $\mathbf{Q}$ som finns är sådana att

$$\mathbf{Q}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \pm\bar{f}_1 & \pm\bar{f}_2 & \pm\bar{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Totalt 8 teckenkombinationer i matrisen ovan till höger ger 8 olika matriser $\mathbf{Q}$. Om vi byter tecken på en kolonn i högra matrisen ovan byter dess determinant tecken. Så till varje kombination av tecken i denna matris som ger en determinant lika med 1 får vi, genom att byta tecken i en kolonn, en matris vars determinant är lika med -1, och vice versa.
Eftersom vi vet från lösningen av uppgift (a) att

$$\det\left(\begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\right) = -1 \quad \text{och} \quad \det\left(\begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\right) = 1$$

så kommer hälften av de möjliga ortogonalmatriserna man kan finna att ha en determinant lika med 1 och hälften en determinant lika med -1, nämligen de där antalet kolonner med minustecken framför $\bar{f}_i$ är udda.

SVAR: Fyra.

(c) (1p) Finns det ortogonalmatriser $\mathbf{Q}_1$ och $\mathbf{Q}_2$ sådana att $\mathbf{Q}_1$ avbildar L_1 och L_3 på M_1 respektive M_2 och $\mathbf{Q}_2$ avbildar L_2 och L_3 på M_1 respektive M_2? (Ett svar utan motivering ger inga poäng.)

SVAR: Planet L_3 har normalvektorn $(1, 0, -1)$ som inte är ortogonal mot L_1:s normal, så L_1 och L_3 är inte ortogonala mot varandra, och kan inte avbildas med en ortogonalmatris på de två planen M_1 och M_2 eftersom dessa är vinkelräta mot varandra. Däremot är L_3 vinkelrät mot L_2 och då kan vi, på samma sätt som i deluppgift (a), hitta en ortogonalmatris som avbildar L_2 på M_1 och L_3 på M_2.

8. Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times k$ matris, med $n > k$ och med rangen lika med $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$. Väl känt från kursen torde vara att om $r = k$ så har matrisen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ en rang som är lika med $\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = k$.

   (a) (2p) Visa att om $r < k$ så är $\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \leq r$.

   Lösning: Låt $N(\mathbf{B})$ beteckna nollrummet till $n \times k$-matrisen $\mathbf{B}$. Vi kommer att använda följande sats:

$$\dim(N(\mathbf{B})) + \text{rank}(\mathbf{B}) = k. \tag{2}$$

   Antag $\bar{x}$ tillhör nollrummet till $\mathbf{A}$, dvs $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}$. Då gäller också att

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\bar{x} = \mathbf{A}^T\bar{0} = \bar{0},$$

   dvs $\bar{x}$ tillhör nollrummet till $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Således är $N(\mathbf{A})$ ett delrum till $N(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ och alltså

$$\dim(N(\mathbf{A}^T\mathbf{A})) \geq \dim(N(\mathbf{A})).$$

   Av denna olikhet följer ur ekvation (2) att

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = k - \dim(N(\mathbf{A}^T\mathbf{A})) \leq k - \dim(N(\mathbf{A})) = r,$$

   vilket skulle visas.

   (b) (3p) Utred under vilka förutsättningar det råder likhet i ekvationen ovan, dvs när är $\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ lika med $\text{rank}(\mathbf{A})$?

   Lösning: Vi visar att generellt gäller att $N(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = N(\mathbf{A})$. Från ekvation (2) följer då att

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$$

   för alla $n \times k$-matriser $\mathbf{A}$, med $k \leq n$.
   Antag att $\bar{x}$ tillhör $N(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$, dvs $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}$. Då gäller även att

$$\bar{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\bar{x} = \bar{x}^T\bar{0} = (0).$$

   Sätt $\bar{y} = \mathbf{A}\bar{x}$. Då gäller $\bar{y}^T = \bar{x}^T\mathbf{A}^T$. Med $\bar{y}^T = (y_1 \ \ y_2 \ \ \ldots \ \ y_n)$ ger ekvationen ovan att

$$(0) = (y_1 \ \ y_2 \ \ \ldots \ \ y_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

   En summa av kvadrater är noll om och om endast alla kvadrater är lika med noll, och således är $\bar{y} = 0$. Vi har nu visat

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}$$

   dvs $N(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ är ett delrum till $N(\mathbf{A})$.
   I föregående deluppgift visade vi att $N(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ alltid har $N(\mathbf{A})$ som delrum. Enda möjligheten är då att

$$N(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$$