Matematiska Institutionen
KTH

**Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 15 mars 2012 kl 08.00-13.00.**

**Examinator:** Olof Heden.

**OBS:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Generellt gäller vid kursen SF1604 för F och D att bonuspoäng får användas vid det första ordinarie tentamenstillfället och vid första ordinarie omtentamen, dvs för F vid decembertentan och junitentan samt för D vid marstentan och junitentan.

Den som har $b$ bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b - 5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

**Betygsgränser:** (Totalsumma poäng är 40p.)

| | | |
|---|---|---|
| 13 | poäng totalt eller mer ger minst omdömet | Fx |
| 15 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | E |
| 20 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | D |
| 25 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | C |
| 30 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | B |
| 35 | poäng totalt eller mer ger minst betyget | A |

## DEL I

1. (ON-system) Låt $P = (1, 2, 1)$, $Q = (3, 1, 2)$ och $R = (0, 3, a)$ vara tre punkter i vanliga 3-dimensionella rymden.

   (a) (2p) Bestäm det reella talet $a$ så att $\overline{PQ}$ och $\overline{PR}$ blir sidor i en rektangel.

   (b) (1p) Bestäm det fjärde hörnet $S$ i rektangeln.

   (c) (2p) Bestäm rektangelns area.

2. (5p) Låt $\bar{e}_1 = (1, 2, 1, -1, 2)$, $\bar{e}_2 = (3, 5, 2, 1, 0)$ och $\bar{e}_3 = (1, 0, 1, 0, 1)$ vara tre vektorer i $R^5$. Visa att dessa tre vektorer är linjärt oberoende. Bestäm också två vektorer $\bar{e}_4$ och $\bar{e}_5$ så att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ och $\bar{e}_5$ bildar en bas för $R^5$.

3. (5p) Nedanstående matris $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   har precis två olika egenvärden $\lambda_1$ och $\lambda_2$, varav $\lambda_1 = 2$. Vidare är kolonnmatrisen $(1\ \ 1\ \ 1)^T$ en egenvektor till $\mathbf{A}$.

   Gör en ortogonal diagonalisering av matrisen $\mathbf{A}$.
   (**Anm.** Du kan få poäng, dock ej 5p, för dellösningar av uppgiften.)

**DEL II**

4. (5p) En talföljd $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... definieras rekursivt genom

$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2} \qquad \text{för} \quad n = 2, 3, ...$$

och $a_0 = 2$, $a_1 = 3$. Visa med ett induktionsbevis att $a_n = 5^n + (-2)^n$ för $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

5. (5p) För vilket, eller vilka värden på det reella talet $a$ gäller att linjerna med parameterformerna $(x, y, z) = (2, 3, 1) + t(2, -1, 1)$ respektive $(x, y, z) = (a, 1, 1) + t(1, 2, 1)$ ligger i samma plan.

6. (5p) Låt $A$ och $B$ beteckna linjära avbildningar från $R^3$ till $R^3$ sådana att

$$A(1, 2, 1) = (2, 1, 4), \qquad A(0, 2, 3) = A(1, 1, 0) = (5, 2, 1),$$

och

$$B(1, 2, 1) = (3, 0, 2), \qquad B(0, 2, 3) = B(1, 1, 0) = (0, 1, 2).$$

Beskriv, på ett "lämpligt" sätt, matriserna relativt standardbasen för samtliga de linjära avbildningar $X$ från $R^3$ till $R^3$ som är sådana att $X \circ A = B$.

---

**DEL III** (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Betrakta de två delrummen

$$L_1 = \text{span}\{(2 \;\; 1 \;\; 0)^T, (0 \;\; -1 \;\; 1)^T\}, \qquad L_2 = \text{span}\{(1 \;\; 0 \;\; -1)^T, (1 \;\; 2 \;\; 0)^T\},$$

och delrummet $L_3 = \text{span}\{(1\ 1\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T\}$ till $R^3$, samt de två delrummen

$$M_1 = \text{span}\{(3 \;\; 4 \;\; 5)^T, (3 \;\; 4 \;\; -5)^T\}, \qquad M_2 = \text{span}\{(4 \;\; -3 \;\; 2)^T, (-4 \;\; 3 \;\; 2)^T\}.$$

(a) (3p) Bestäm en ortogonalmatris $\mathbf{Q}$ med $\det(\mathbf{Q}) = 1$ och som är sådan att den avbildar $L_1$ på $M_1$ och $L_2$ på $M_2$, dvs

$$\bar{v} \in L_i \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Q}\bar{v} \in M_i, \quad \text{för} \quad i = 1, 2.$$

(b) (1p) Hur många olika ortogonalmatriser $\mathbf{Q}$ finns det som löser uppgiften ovan? (En kortfattad motivering räcker.)

(c) (1p) Finns det ortogonalmatriser $\mathbf{Q}_1$ och $\mathbf{Q}_2$ sådana att $\mathbf{Q}_1$ avbildar $L_1$ och $L_3$ på $M_1$ respektive $M_2$ och $\mathbf{Q}_2$ avbildar $L_2$ och $L_3$ på $M_1$ respektive $M_2$? (Ett svar utan motivering ger inga poäng.)

8. Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times k$ matris, med $n > k$ och med rangen lika med $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$. Väl känt från kursen torde vara att om $r = k$ så har matrisen $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ en rang som är lika med $\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = k$.

(a) (2p) Visa att om $r < k$ så är $\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \leq r$.

(b) (3p) Utred under vilka förutsättningar det råder likhet i ekvationen ovan, dvs när är $\text{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ lika med $\text{rank}(\mathbf{A})$?