SF1604, 140116, LÖSNINGAR

(1) (a) Då $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$ och $|\sqrt{3}-i| = 2$ ser vi att

$$|(1+i)^{17}(\sqrt{3}-i)^5(1-i)^{-15}| = |1+i|^2 \cdot 2^5 = 2^6$$

Då $\arg 1+i = \pi/4$ och $\arg \sqrt{3}-i = -\pi/6$ får vi

$$\arg(1+i)^{17}(\sqrt{3}-i)^5(1-i)^{-15} = \pi/2 - 5\cdot\pi/6 = -2\pi/3$$

(b) Eftersom

$$\begin{aligned} z^8 - 16 = (z^4-4)(z^4+4) &= (z^2-2)(z^2+2)(z^4+4) \\ &= (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z^2+2)(z^4+4) \end{aligned}$$

och $z^4+4 = (z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$ då $z^4+4=0$ har rötterna $z = \pm(1\pm i)$ ser vi att

$$z^8-16 = (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(z^2+2)(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$$

(de kvadratiska polynomen har komplexkonjugerade rötter och kan ej skrivas som produkter av reella förstagradspolynom.)

(2) Låt A beteckna den givna matrisen.

(a) För $a=1$ ser vi att

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

A är därför inverterbar och har oberoende kolonner. Ekvationen $Ax = (2,1,2,2)$ har lösningen $x = (1,\ -1,\ 0,\ 2)$; koordinaterna för v i basen $\{e_1,\dots,e_4\}$ är således $(1,\ -1,\ 0,\ 2)$.

(b) Om $a=2$ är $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Radoperationer ger att

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och således är $\dim L_a = \dim \operatorname{col} A = 3$.

(c) Radoperationer ger

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a-2 & -2\,a+3 \\ 0 & 0 & -a+2 & -(a-1)^2 \end{pmatrix}$$

Om $a \neq 2$ är de tre första kolonnerna oberoende, och om $a = 2$ är kolonn $1, 2, 4$ oberoende. Svaret är alltså nej.

(3) (a) Om vi låter $v_1 = (1,\ 2,\ -3)$ ser vi att $Av_1 = (7,\ 14,\ -21) = 7 \cdot (1,\ 2,\ -3)$, således är $\lambda_1 = 7$ tillhörande egenvärde. Eftersom alla radsummor i A är lika med 14 ser vi att $v_2 = (1,\ 1,\ 1)$ är en egenvektor med egenvärde $\lambda_2 = 14$. Eftersom A är symmetrisk är egenvektorerna ortogonala; vi bildar $v_3 = v_1 \times v_2 = (5,\ -4,\ -1)$ och noterar att $Av_3 = (-35,\ 28,\ 7) = -7 \cdot v_3$. Således är v_3 en egenvektor med egenvärde $\lambda_3 = -7$.

Egenvärdena till A ges av $7, 14, -7$, och motsvarande egenrum spänns upp av vektorerna $(1,\ 2,\ -3), (1,\ 1,\ 1)$ och $(5,\ -4,\ -1)$.

(b) Låt $P = (v_1\, v_2\, v_3)$ och $F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Eftersom v_1, v_2, v_3 är egenvektorer är $AP = PF$, dvs $A = PFP^{-1}$ och vi får att $A^{-1} = PF^{-1}P^{-1}$.

Eftersom $P^tP = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$ ser vi att matriserna

$$D = F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix},\ B = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

och

$$C = P^{-1} = (PP^t)^{-1}P^t = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}^{-1} \cdot P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{42} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{42} \end{pmatrix}$$

uppfyller de önskade egenskaperna.

(4) Enligt ledtråden är $V = Bh/3$ där B är en basyta (för en triangel) och h är den vinkelräta höjden. Å andra sidan ges volymen av den parallellpiped som fås ur tre kantvektorer av $2Bh$, och vi vet att denna volym ges av trippelprodukten, som i sin tur

kan skrivas som en determinant. Vi får då att

$$V = |\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})|/6 = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| /6 = 2.$$

Låt $n = \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = (-4,\, 4,\, -4)$ vara en normalvektor till planet som går igenom P, Q, S. Eftersom $\overrightarrow{QP} \cdot n = 12$ och $\overrightarrow{QT} \cdot n = -12$ har olika tecken ligger punkterna P och T på olika sidor om planet. T ligger alltså utanför tetraedern.

(5) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Vi noterar att $\langle x, y\rangle = x^t A y$. Linjäritet i båda variablerna följer därför omedelbart. Eftersom A är symmetrisk får vi även att $\langle y, x\rangle = y^t A x = x^t A^t y = x^t A y = \langle x, y\rangle$.
Eftersom

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$$

ser vi att $\langle x, x\rangle \geq 0$, med likhet omm $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$. Alltså är $\langle x, x\rangle$ positivt definit, och $\langle x, y\rangle$ är därför en inre produkt på $\mathbb{R}^3$.

(b) Låt $w = (1,\, 1,\, 1)$ och låt $v = (1,\, 0,\, 1)$.
Eftersom $v = P_L(v) + P_{L^\perp}(v)$ ser vi att

$$P_{L^\perp}(v) = v - P_L(v) = v - \frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle} w = v - \frac{w^t A v}{w^t A w} w = v - \frac{5}{9} w = \left(\frac{4}{9},\, -\frac{5}{9},\, \frac{4}{9}\right)$$

(6) Låt v_1, v_2 vara bas för $\mathrm{col}(A)$, och w_1, w_2 vara bas för $\mathrm{col}(B)$. Låt oss anta att $Ae_1 = 0$ (vi kan alltid byta bas så att detta inträffar.) Om vi kan hitta A, B så att $e_1 \notin \mathrm{col}(B)$ och $v_1 \in \ker(B)$ så uppfyller A, B de önskade egenskaperna. Om vi låter $v_1 = (1, 1, 1)$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ så är $Av_1 = (0, 0, 0)$ och uppenbarligen gäller att $e_1 \notin \mathrm{col}(B)$. Om vi till exempel låter

$$A = (0\, v_1\, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ser vi att $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 2$ (de nollskilda kolonnerna är oberoende). Eftersom

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi att $\operatorname{rank}(AB) = 2$, och då

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

får vi att $\operatorname{rank}(BA) = 1$.

(7) (a) Låt $v_1 = (1,0,1,1), v_2 = (2,3,1,0)$, och $v_3 = (0,1,1,2)$. Om vi kan hitta v_4 så att $v_1, \ldots, v_4$ är oberoende så kan vi ta $K = \operatorname{span}(v_3, v_4)$ eftersom $av_1 + bv_2 = cv_3 + dv_4$ då implicerar att $a = b = c = d = 0$. Om vi låter $v_4 = e_4$ ser vi att

$$\det(v_1\, v_2\, v_3\, v_4) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

och vektorerna är oberoende. Svar: $K = \operatorname{span}((0,1,1,2),(0,0,0,1))$.

(b) Betrakta avbildningen, från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^4$, som ges av $(x_1, x_2) \to x_1e_1 + x_2e_2 + A(x_1e_1 + x_2e_2)$. Om (x_1, x_2) avbildas på nollvektorn gäller att

$$x_1e_1 + x_2e_2 + A(x_1e_1 + x_2e_2) = 0$$

dvs att

$$x_1e_1 + x_2e_2 = -A(x_1e_1 + x_2e_2) = -(y_1f_1 + y_2f_2).$$

Skevheten implicerar då att $x_1e_1 + x_2e_2 = 0$, vilket i sin tur innebär att $x_1 = x_2 = 0$ eftersom e_1, e_2 är oberoende. Eftersom kärnan är trivial har bilden dimension två, dvs $\dim W_A = 2$.

(c) W_A är skevt mot L omm $v + Av = v'$, för $v, v' \in L$, bara har lösningen $v + Av = 0 = v'$. Men $v + Av = v'$ omm $Av = v' - v$, vilket från skevheten mellan K, L innebär att $Av = 0 = v' - v$. Alltså är W_A skevt mot L omm $\ker(A)$ är trivial (vilket i sin tur är ekvivalent med att $\ker(\mathbf{A})$ är trivial.) Vi ser även att W_A är skevt mot K omm $v + Av = w$, för $v \in L$, $w \in K$, bara har lösningen $v + Av = 0 = w$. Men $v + Av = w$ omm $v = w - Av$, och skevheten innebär att enda lösningen ges av $v = 0 = w - Av$, dvs $v = 0$ och $w = 0$. Alltså är W_A alltid skevt mot K. Sammanfattningsvis är W_A skevt mot både L, K omm $\mathbf{A}$ är inverterbar.

Betrakta nu möjliga lösningar, för $v, v' \in L$, till $v + Av = v' + Bv'$ under förutsättning att både A, B är invertebara. v, v' är en lösning omm $v - v' = Bv' - Av$, vilket enligt skevheten mellan K, L implicerar att $v = v'$ samt att $Bv' = Bv = Av$; vi ser att icketrivial lösning till $v + Av = v' + Bv'$ finns omm $Av = Bv$ för någon $v \neq 0$. Alltså är W_A och W_B skeva omm $A^{-1}B$ ej har 1 som egenvärde.

(8) Vi noterar att f har en fixpunkt omm $Ax + b = x$ har en lösning omm $(A - I)x = -b$ har en lösning. Eftersom $|Ax| > |x|$ för alla $x \neq 0$ kan A ej ha 1 som egenvärde. $A - I$ är därför inverterbar. Således finns en lösning till $(A - I)x = -b$.