Lösningar till tentamen den 16/3 2005
Kompletteringskurs i matematik, 5B1114

1. Punkten $(1,1,f(1,1))$ är i planet $\Rightarrow 4+3-3f(1,1)=1$
$\Rightarrow \underline{f(1,1)=2}$. Tangentplanets normaler $(D_1f(1,1), D_2f(1,1), -1)$
och $(4,3,-3)$ är parallella.
$D_1f(1,1)=4t$, $D_2f(1,1)=3t$, $-1=-3t \Rightarrow t=\frac{1}{3}$,
$\underline{D_1f(1,1)=\frac{4}{3}}$, $\underline{D_2f(1,1)=1}$.

---

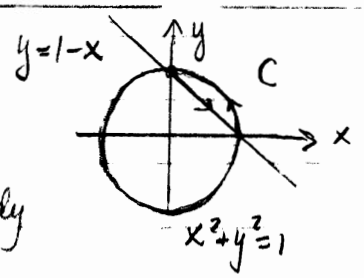
2. Kvadratkomplettering ger $\left(z-\frac{5+3i}{2}\right)^2 = -2-6i+\frac{(5+3i)^2}{4}$
Låt $z-\frac{5+3i}{2}=a+bi$, $a^2-b^2+2abi=\frac{1}{4}(-8-24i+25-9+30i)$
$=2+\frac{3}{2}i$, $\begin{cases} a^2-b^2=2 \\ 2ab=\frac{3}{2}\end{cases}$ Insättning av $b=\frac{3}{4a}$ ger
$a^2-\frac{9}{16a^2}-2=0$ dvs. $a^4-2a^2-\frac{9}{16}=0$. Vi får att
$a^2=1\pm\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{9}{4}$, $a=\pm\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{4a}=\pm\frac{1}{2}$.
Vidare är $z=\frac{5+3i}{2}\pm\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)$. Svar: $\underline{z=4+2i}$ och $\underline{z=1+i}$.

---

3. Enligt kedjeregeln är $D_1F(x,y)=2xf'(x^2-y^2)$ och
$D_2F(x,y)=-2yf'(x^2-y^2)$, $D_1G(x,y)=yg'(xy)$ och $D_2G(x,y)$
$=xg'(x,y)$.
Skalärprodukten $\operatorname{grad}F(x,y)\cdot\operatorname{grad}G(x,y)=(2xf'(x^2-y^2),-2yf'(x^2-y^2))\cdot$
$(yg'(xy), xg'(xy)) = 2xf'(x^2-y^2)yg'(x,y)-2yf'(x^2-y^2)xg'(xy)=0$.

---

4. Vi kan använda Green's formel



Om $F(x,y)=(x^2-y^2, 2xy)=(F_1(x,y), F_2(x,y))$
$$\oint_C F\cdot dr = \iint_A (D_1F_2-D_2F_1)\,dx\,dy = 4\iint_A y\,dx\,dy$$
där A är området innanför C
$$\int_C F\cdot dr = 4\int_0^1\left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx = 4\int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-x^2-(1-x)^2)\,dx$$
$$= 4\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 4\left[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}$$

5. Med sfäriska koordinater $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

$$\iiint_K z\,dV = \iiint_B \rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

där B är området: $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

Vi får $\iiint_K z\,dV = \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$

$= \frac{1}{4}a^3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}\left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi a^3}{4}}}$

---

6. Vi visar att F har potential, dvs. $F = \operatorname{grad} u$.
Antag att $D_1 u(x,y,z) = x e^{x^2}$. Då är $u = \frac{1}{2}e^{x^2} + g(y,z)$.
Derivering m.a. på y ger $D_2 u = D_1 g = 3(y+3)^2(z-1)$.
Genom att integrera får vi $g(y,z) = (y+3)^3(z-1) + h(z)$.
Vi deriverar $u = \frac{1}{2}e^{x^2} + (y+3)^3(z-1) + h(z)$ m.a. på z.
$\Rightarrow (y+3)^3 + h'(z) = (y+3)^3 \Rightarrow h(z)$ är konstant som vi kan välja $= 0$. Funktionen $u(x,y,z) = \frac{1}{2}e^{x^2} + (y+3)^3(z-1)$ uppfyller ekvationen $F = \operatorname{grad} u$. Integralen är således oberoende av vägen.

$$\int_C F\cdot dr = u(0,0,1) - u(1,0,0) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e - 27\right) = \underline{\underline{\frac{55-e}{2}}}$$

---

7. De partiella derivatorna av $f(x,y) = e^{xy+1} - xy$ är
$D_1 f(x,y) = y e^{xy+1} - y = y(e^{xy+1} - 1)$
$D_2 f(x,y) = x e^{xy+1} - x = x(e^{xy+1} - 1)$
Ekv. systemet $D_1 f(x,y) = 0$, $D_2 f(x,y) = 0$ har lösningarna $x = y = 0$ och $xy + 1 = 0$ dvs. $y = -\frac{1}{x}$.
De kritiska punkterna är $\underline{(0,0)}$ och $\underline{(x, -\frac{1}{x})}$ där $x \neq 0$.
$D_{11} f(x,y) = y^2 e^{xy+1}$, $D_{12} f(x,y) = e^{xy+1} + xy e^{xy+1} - 1$
$D_{22} f(x,y) = x^2 e^{xy+1}$
I origo får vi $AC - B^2 = 0 - (e-1)^2 < 0$
Origo är en <u>sadelpunkt</u>, dvs. inte någon extrempunkt.

8. Antag att A är symmetrisk, A har egenvärden 0 och 5 och $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ är en egenvektor som motsv. egenvärdet 5. Låt $P=\begin{pmatrix}1 & c\\2 & d\end{pmatrix}$. A är diagonaliserbar, eftersom A är symmetrisk; $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. (*)

A:s egenvektorer $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ är ortogonala $\Rightarrow$ $c+2d=0 \Rightarrow c=-2d$. Vi kan skriva

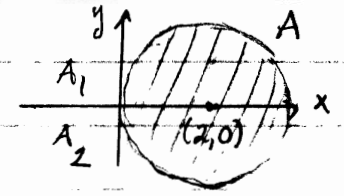
$P=\begin{pmatrix}1 & -2d\\2 & d\end{pmatrix}$. Från (*) följer att $AP=P\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -2d\\2 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\10 & 0\end{pmatrix}$. Vi får att

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\10 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 0\\10 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{5d}\begin{pmatrix}d & 2d\\-2 & 1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}}}$$

---

9. $x^2+y^2\le 4x \iff (x-2)^2+y^2\le 4$



Med polära koordinater $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ olikheten är $r^2\le 4r\cos\theta \iff r(r-4\cos\theta)\le 0$ som ger $r\le 4\cos\theta$.

För halvsfären A_1 där $y\ge 0$ $\iint_{A_1} x|y|\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,dr$.

$\iint_{A_2} x|y|\,dx\,dy = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{4\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,dr$

(på A_2 är $|y|=-y$) Med variabelbytet $t=-\theta$

$$\iint_{A_2} x|y|\,dx\,dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{4\cos t} r^3\cos t\,(-\sin t)\,(-dt)\,dr$$

$=$ samma som $\iint_{A_1}$

$$\Rightarrow \iint_A x|y|\,dx\,dy = 2\iint_{A_1} x|y|\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^{4\cos\theta}d\theta$$

$$=2\cdot 4^3\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{2\cdot 4^3}{6}\left[-\cos^6\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4^3}{3} = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

---

10. a) $T(x,y,z) = (x+y,\ y+z) = (0,0) \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

$\iff x=t,\ y=-t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R} \iff (x,y,z) = t(1,-1,1)$

En bas för nollrummet är $\underline{\{(1,-1,1)\}}$

b) En vektor (u,v) är i T:s värderum $\iff (u,v) = T(x,y,z)$ för någon vektor (x,y,z)

$\begin{cases} u = x+y \\ v = y+z \end{cases} \iff \begin{cases} x = u-y \\ y = v-z \end{cases}$ Låt $z=t$. Då är

$y = v-t$, $x = u-(v-t) = u-v+t$ och $z=t$

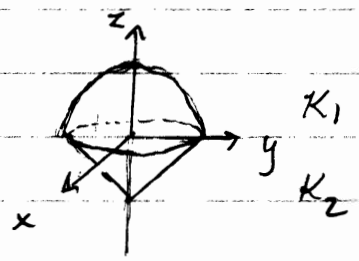
Alltså $(u,v) = T(u-v+t,\ v-t,\ t)$ där t kan väljas godtyckligt. Värderummet är hela $\mathbb{R}^2$.

En bas för värderummet är till ex. $\underline{\underline{\{(1,0),(0,1)\}}}$.

---

11. Ytan är sluten. Enligt Gauss sats

är $\iint_S F\cdot N\,dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dV = \iiint_K (y+z)\,dV$



$= \iiint_K z\,dV$ p.g.av symmetrin.

K_1: $x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0$ $\quad \iiint_{K_1} z\,dV = \frac{\pi}{4}$ enligt uppg. 5.

K_2: $-1+\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 0$

$\iiint_{K_2} z\,dV = \iint_B \left(\int_{-1+\sqrt{x^2+y^2}}^{0} z\,dz\right)dx\,dy$ där B är cirkelskivan $x^2+y^2\le 1$

$= \iint_B -\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-1+r)^2 r\,d\theta\,dr$ (polära koord.)

$= -\frac{1}{2}\cdot 2\pi \int_0^1 (r^3-2r^2+r)\,dr = -\frac{\pi}{12}$

$\iint_S F\cdot N\,dS = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$