

Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Onsdagen den 16 mars 2005, kl 8.00-13.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

.....

1. Funktionen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Planet $4x + 3y - 3z = 1$ är tangentplan till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, f(1, 1))$. Bestäm $f(1, 1)$, $D_1f(1, 1)$ och $D_2f(1, 1)$. (3p)
2. Lös ekvationen $z^2 - 5z - 3iz + 2 + 6i = 0$. (3p)
3. Antag att $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ och $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ och är deriverbara funktioner. Låt $F(x, y) = f(x^2 - y^2)$ och $G(x, y) = g(xy)$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Visa att $\text{grad}F(x, y) \cdot \text{grad}G(x, y) = 0$. (3p)
4. Beräkna linjeintegralen $\oint_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$ där C är kurvan som begränsar området $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$ genomlöst ett varv i positiv riktning. (4p)
5. Beräkna integralen $\iiint_K z dV$ där K är halvklotet $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$ och a ett positivt tal. (4p)
6. Visa att integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{x^2}, 3(y+3)^2(z-1), (y+3)^3)$ är oberoende av vägen och beräkna integralen när C är en glatt kurva från punkten $(1, 0, 0)$ till punkten $(0, 0, 1)$. (4p)
7. Låt $f(x, y) = e^{xy+1} - xy$. Bestäm alla kritiska punkter till f och undersök om origo är en lokal maximumpunkt, minimumpunkt eller ingen extrempunkt. (4p)
8. Bestäm matrisen eller matriserna A med följande egenskaper: A är en symmetrisk 2×2 -matris, A har egenvärden 0 och 5 och en egenvektor, som motsvarar egenvärdet 5, är $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (4p)

v.g. vänd

9. Beräkna dubbelintegralen $\iint_A x|y| dx dy$ där A är området $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x\}$. (5p)

10. En linjär avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definieras genom $T(x, y, z) = (x+y, y+z)$. Bestäm

a) en bas för nollrummet av T .

b) en bas för värderummet av T . (5p)

11. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xy)$ och S är ytan av "glasstruten" som bestäms av $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ och $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 0$. Enhetsnormalen \mathbf{N} är riktad utåt.

(Ledning: Eventuellt kan resultatet från uppgift 5 användas.) (5p)
