

1. alt1. Induktionsbevis
alt2. Binomial formel
alt3. Konjugat regeln (se boken sid 10)

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \quad \text{med } a=8, b=1, \text{ fås } 8^n - 1 = (8-1) \sum_{k=0}^{n-1} 8^{n-1-k}.$$

Vilket så visas.

2. Volymen ges av

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\infty} (f(x))^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx = \left[x^2 - 4x + 8 = 4 \left(1 + \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 \right) \right] = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-2}{2} \right)^2} dx = \\ &= \left[\frac{x-2}{2} = t \right] = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} [\arctan t]_{-1}^{\infty} = \frac{3\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{3\pi^2}{8}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x - \sin(4x^2)}{\ln(1+2x^2)} = [\text{t.ex MacLaurinsutveck}] =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x + O(x^3)) - (4x^2 + O(x^6))}{2 + O(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + O(x^2) - 4 + O(x^4)}{2 + O(x^2)} = \frac{-1}{2}$$

svar: $\frac{-1}{2}.$

4. Längden av kurvan ges av $L = \int_0^{10} \sqrt{1 + (y')^2} dx =$

$$\begin{aligned} &= \left[1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \right. \\ &= \left. \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \right] = \end{aligned}$$

Detta ger att $L = \int_0^{10} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^{10} = \frac{e^{10} - e^{-10}}{2} = \sinh(10)$.

Svar: $\frac{e^{10} - e^{-10}}{2} = \sinh(10)$

5. Vi löser $y'' - 2y' + 5y = xe^x$. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$. Lösningen till den homogena y_h fås via den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i$. Detta ger att $y_h = e^x (A \cos x + B \sin x)$. En partikulär lösning fås t.ex via ansatsen $y_p = ze^x$ som ger $z'' + 4z = 8x$. Vi ansätter $z = ax + b$ och får $4ax + 4b = 8x \Rightarrow a = 2$ & $b = 0$. Således $y_p = 2xe^x$.
Svar: $y = e^x (A \cos x + B \sin x) + 2xe^x$.

6. a) Funktion $f(x) = \ln(1+x) - \frac{3x}{x+4}$ är deriverbar för $x \geq 0$. Vidare är

$$f(0) = 0 \text{ och } f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{12}{(4+x)^2} = \frac{(x-2)^2}{(1+x)(4+x)^2}.$$

Detta ger att funktionen är strängt växande för alla $x > 0$.

Alltså $f(x) = \ln(1+x) - \frac{3x}{x+4} > 0$ för alla $x > 0$.

b) Välj $x = \sqrt{2}$. Då fås

$$\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} > 0, \text{ dvs } \ln(1+\sqrt{2}) > \frac{3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}.$$

7. Sätt $a_n = \frac{1}{n} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) > 0$, eftersom $f(x) = x - \arctan(x) > 0$ för $x > 0$.

Ty $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$ för $x > 0$ och $f(0) = 0$ ger att funktionen är strängt växande för alla $x > 0$. Därmed är $f(x) > 0, x > 0$.

Nu jämför vi a_n med $b_n = \frac{1}{n^3}$. Vi

$$\begin{aligned} \text{f} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3} \neq 0. \end{aligned}$$

Jämförelseprincipen (sats 9.7, sid.355) ger att den givna serien är konvergent.

8. Vi derivera implicit $x^4 + y^4 = 2x^2y$ och får $4x^3 + 4y^3y' = 4xy + 2x^2y'$. Insättningen $x = 1, y = 1$ ger $4 + 4y' = 4 + 2y' \Rightarrow y'(1) = 0$. Alltså funktionen har en stationär(kritisk) punkt i $x = 1$. För att avgöra dess karaktär använder vi

t.ex. andra derivatans test (sid.144). Vi derivera implicit en gång till den givna funktionen och får

$12x^2 + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 4y + 4xy' + 4xy' + 2x^2y''$. Insättningen $x = 1, y = 1$ och $y' = 0$ ger att $y''(1) = -4$. Andra derivatans test ger vi har ett lokalt maximum i $x = 1$.

9. Betrakta funktionen $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) - \sqrt{5 - x}$ är definierad om

$\sqrt{5 - x}$ definierad om $x \leq 5$

$\sqrt{x^2 - 9}$ definierad om $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3$ eller $x \geq 3$

$x + \sqrt{x^2 - 9}$ definierad om $x > 0$ och $x^2 - 9 \geq 0$.

f är definierad om $3 \leq x \leq 5$.

I intervallet $3 < x < 5$ är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 9}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} \right) - \frac{-1}{2\sqrt{5 - x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} + \frac{1}{2\sqrt{5 - x}} > 0 \quad 3 < x < 5 \end{aligned}$$

Vilket medför att funktionen är strängt växande på detta intervall. Vidare är

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) - \sqrt{5 - x}$ kontinuerlig på det kompakta

intervallet $3 \leq x \leq 5$ och följaktligen antar ett minsta värde $f(3) = \ln 3 - 2$ och ett största värde $f(5) = \ln 9$.

Svar:
$$\begin{cases} \max_{3 \leq x \leq 5} f(x) = f(5) = \ln 9. \\ \min_{3 \leq x \leq 5} f(x) = f(3) = \ln 3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

10. $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e^t) dt$, $0 \leq x \leq 2$, $F(0) = 0$. Enligt sats 7.5 om existens av

primitiva funktioner har vi $F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x (e^{t^2} - e^t) dt \right] = e^{x^2} - e^x$.

Vidare $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e^t) dt$ är kontinuerlig deriverbar på det kompakta

intervallet $0 \leq x \leq 2$. Detta medför att F antar sitt största och minsta värde på det kompakta intervallet $0 \leq x \leq 2$. $F'(x) = e^{x^2} - e^x = 0 \Rightarrow x = 0, 1$. De extrempunkterna är 0, 1, 2. Första derivatans test ger svaret.

	0		1		2
F'	0	-	0	+	$F(2)$
F	$F(0) = 0$	$\searrow$	Lokalt min	$\nearrow$	

Ur tabellen har vi
 $x = 1$ ger lokalt min

Medan

$$F(2) = \int_0^2 (e^{t^2} - e^t) dt \geq \int_0^2 \left(\frac{t}{2} e^{t^2} - e^t \right) dt = \left[\frac{e^{t^2}}{4} - e^t \right]_0^2 = e^2 \left(\frac{e^2}{4} - 1 \right) + \frac{3}{4} > 0$$

Detta ger att $x = 2$ ger lokalt max

Svar: $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e^t) dt$, $0 \leq x \leq 2$, $F(0) = 0$. antar sitt minsta värde i $x = 1$

och sitt störta värde i $x = 2$.