

KTH Matematik

Tentamen i Matematik I, 5B1115 för E och 5B1135 för ME, måndagen den 8/11 2004 kl. 8.00 - 13.00.

-Inga hjälpmedel är tillåtna.

-Preliminära betygsgränser är 16, 22 och 30 poäng för betygen 3, 4 resp. 5.

-Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

1. Visa att $8^n - 1$ är delbart med 7 för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \dots$. (3p)
2. Bestäm volymen av den rotations kropp som uppstår då ytan definierad av $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$, $0 \leq x < \infty$, roterar omkring x-axeln. (3p)
3. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(3x) - \sin(4x^2)}{\ln(1 + 2x^2)}$. (3p)
4. Bestäm längden av kurvan $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 10$. (3p)
5. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 2y' + 5y = 8xe^x$. (3p)
- 6a. Visa att $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{3x}{4 + x}$ är växande för $x \geq 0$. (3p)
- b. Vilket tal är störst, $\ln(1 + \sqrt{2})$ eller $\frac{3\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}$? (1p)

V.g. vänd!

7. Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$ har enbart positiva termer samt avgör om den är konvergent eller divergent. (4p)
8. En deriverbar funktion $y(x)$ definieras implicit av ekvationen $x^4 + y^4 = 2x^2y$ och av att $y(1) = 1$. Visa att funktionen har en stationär punkt i $x = 1$ och avgör punktens karaktär. (4p)
9. Bestäm största och minsta värdet av $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) - \sqrt{5 - x}$.
Ledning: Bestäm först det intervall i vilket funktionen är definierad. (4p)
10. Bestäm de x-värden där funktionen $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} - e^t) dt$, $0 \leq x \leq 2$, antar sitt största och sitt minsta värde. (4p)