

Institutionen för matematik.
KTH

Tentamen i Matematik 1, 5B1115, för Bio, E, K och Media
samt 5B1135 för ME .
måndagen den 10/1 2005 kl. 14.00 - 19.00.

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos 3x - 1}.$$

(3p)

2. Hur många nollställen har funktionen $f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x}$,
i intervallet $x > -1$?
- (3p)

3. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+2x+2} dx.$$

(3p)

4. Visa att $e^x(1-x) \leq 1$ för alla x .
- (3p)

5. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då ytan, definierad
av $0 \leq y \leq x\sqrt{\ln(x+1)}$, $0 \leq x \leq 1$,
roterar omkring x-axeln.
- (3p)

V.g. vänd!

6. Bestäm värdemängden (dvs de värden funktionen antar) för funktionen

$$F(x) = \frac{4+x}{2+|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(4p)

7.a Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-2x}.$$

(2p)

b. Antag att en lösning i 7a uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = b$ och $y'(0) = 0$.

Bestäm b så att lösningen blir begränsad. (2p)

8.a Bestäm den generaliserade integralen $\int_5^\infty \frac{dx}{x^2 - 4x}$. (2p)

b. Avgör om den generaliserade integralen $\int_5^\infty \frac{dx}{x^2 + 4 \sin x}$ är konvergent eller divergent. (2p)

9.a Visa att $10^n + 8$ är jämnt delbart med 9 för $n = 0, 1, 2, \dots$. (3p)

b. Visa att $n^2 - 3$ inte är jämnt delbart med 10 för $n = 2, 3, 4, \dots$ (1p)

10. Låt $G(x)$ vara en deriverbar funktion av typ $O(x^n)$. Är det sant att

$$\frac{d}{dx}G(x) = O(x^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots ?$$

Bevisa eller ge motexempel. (4p)