

Matematik I, för Bio, E, K, media, ME och Open

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 5x}{\cos 3x - \cos 4x} = \left[\frac{0}{0} \right], \text{L'Hopitalsregeln} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + 5 \sin 5x}{-3 \sin 3x + 4 \sin 4x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + 25 \cos 5x}{-9 \cos 3x + 16 \cos 4x} = \frac{-4 + 25}{-9 + 16} = 3$$

$$\text{Svar: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 5x}{\cos 3x - \cos 4x} = 3$$

2. a) Vi kontrollerar att påståendet

$4^n + 2$ är jämnt delbart med 3

är sant för

$n = 1$: $4^1 + 2$ är jämnt delbart med 3. Detta är sant.

b) Antag att påståendet är sant för $n = k$,

dvs antag att det är sant att $4^k + 2$ är jämnt delbart med 3

Vi vill visa att påståendet är sant för $n = k + 1$,

dvs vi vill visa att det är sant att

$4^{k+1} + 2$ är jämnt delbart med 3

Vi har $4^{k+1} + 2 = 4 \cdot 4^k + 2 = 3 \cdot 4^k + 4^k + 2$

De båda talen $3 \cdot 4^k$ och $4^k + 2$ är jämnt delbara med 3 ($4^k + 2$ enligt antagandet) och då är deras summa också jämnt delbart med 3.

c) enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $n=1, 2, 3, \dots$

3. Funktionen $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow f$ antar ett största och ett minsta värde på intervallet. Det största (resp. minsta) värdet antas antingen i en ändpunkt på intervallet eller en kritisk punkt eller i en singular punkt.

Kritiska punkter fås $f'(x) = 0$. Vi har $f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x-4}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Singulara punkter är punkter där $f'(x)$ är ej definierad $\Rightarrow x = 1$ är en singular punkt.

Aktuella punkter: 2, 1 och 5 (den andra ändpunkten).

I dessa punkter fås $f(2) = -2$, $f(1) = 0$, $f(5) = 2$.

Svar: 2 och -2.

4a. Funktionen $f(x) = 4 \arcsin \sqrt{x} + 2 \arcsin \sqrt{1-x}$ är definierad och kontinuerlig på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

För $0 < x < 1$ är f deriverbar och $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} > 0$ vilket inne-

bär att f är strängt växande på detta intervall. Kontinuiteten av f medför att f är strängt växande på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och följaktligen är f inverterbar.

4b. Värdeområdet för f^{-1} är = definitionsmängden för f dvs $[0,1] \Rightarrow$ största värdet av f^{-1} är $= 1$.

Svar: 1.

5. Differentialekvationens karakteristisk ekvation är $(r-2)(r-3) = 0$, dvs $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow$ den sökta differentialekvationen är på formen $y'' - 5y' + 6y = f(x)$. En partikulärlösning är $y = \cos^2 x$. Man får $y' = -\sin 2x$, $y'' = -2 \cos 2x$ vilket, insatt i ekvationen, ger

$$f(x) = -2 \cos 2x + 5 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 3 + 5 \sin 2x + \cos 2x.$$

$$\text{Svar: } y'' - 5y' + 6y = 3 + 5 \sin 2x + \cos 2x.$$

- 6a. Implicit derivering av $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ ger $3x^2 - 3y - 3xy' - 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$.

- 6b. Man får $y'(1) = 0$ vilket innebär att $x = 1$ är en kritisk punkt till y .

- 6c. Implicit derivering av $y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$ ger $y'' = \frac{(2x - y')(x + y^2) - (x^2 - y)(1 + 2yy')}{(x + y^2)^2}$ och för

$x = 1, y = 1$ och $y' = 0$ fås $y'' = 1 > 0$ vilket medför att $x = 1$ är en lokal minimipunkt för funktionen y .

$$\text{Svar: } y' = \frac{x^2 - y}{x + y^2}; x = 1 \text{ är en lokal minimipunkt.}$$

7. Vi betecknar radien av cylindern med r och höjden med $2h$. Eftersom cylindern är inskriven i sfären med radien a . Volymen av cylindern ges

$$V(h) = \pi r^2 2h = 2\pi(a^2 - h^2)h, \quad 0 \leq h \leq a$$

. För att hitta den största volymen deriverar vi och sätter derivatan lika med noll

$$\frac{dV}{dh} = 2\pi[a^2 - 3h^2] = 0 \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Funktionen $V(h)$ har ett maximum i punkten $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$, eftersom V är deriverbar, positiv och lika med noll för $h = 0, a$.

$$\text{Svar: den största volymen är } V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$$

- 8a. Vi har $y' = 1 + 2x$, $y'(n) = 1 + 2n$ och tangenten ges av $\frac{y - n - n^2}{x - n} = 1 + 2n$. För $x = 0$ fås (tangentens skärningspunkt med y -axeln) $y = -n^2$ och $y = 0$ ger (tangentens skärningspunkt med x -axeln) $x = \frac{n^2}{1 + 2n}$. Arean $a_n = \frac{n^4}{2(1 + 2n)}$.

$$\text{Svar: } a_n = \frac{n^4}{2(1 + 2n)}.$$

- 8b. Vi har $\frac{1}{a_n} = \frac{2(1 + 2n)}{n^4} = \frac{2}{n^4} + \frac{4}{n^3}$. Eftersom serierna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ är konvergenta så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergent.

$$\text{Svar: serien är konvergent.}$$

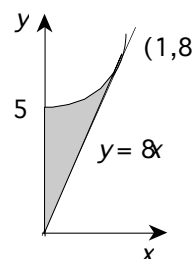
9. $y = \frac{36}{4 - x^2} - 4$, $y' = \frac{72x}{(4 - x^2)^2}$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 8$.

Normalens ekvation: $x = 0$.

Tangentens ekvation: $y - 8 = 8(x - 1)$, dvs $y = 8x$.

$$A = \int_0^1 \left(\frac{36}{4 - x^2} - 4 - 8x \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{36}{4 - x^2} \right) dx - [4x + 4x^2]_0^1 =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{9}{2 - x} + \frac{9}{2 + x} \right) dx - 8 = 9[-\ln(2 - x) + \ln(2 + x)]_0^1 - 8 = 9 \ln 3 - 8.$$



$$\text{Svar: } 9 \ln 3 - 8.$$

10. Vid parallellförflyttningen ett steg åt vänster, $x \rightarrow x + 1$, övergår kurvan $y = (x-1)\sqrt{2x - x^2}$ på kurvan $y_1 = x\sqrt{1 - x^2}$ och linjen $x = 1$ övergår på y -axeln. Vi får samma volym om det nya området roteras kring y -axeln.

$$\begin{aligned} \text{Volym} &= 2\pi \int_{-1}^1 |xy_1| dx = 2\pi \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx \quad \{ x = \sin t, \quad dx = \cos t \, dt \} = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t \cos t)^2 dt = \\ &= \pi/2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt = \pi/4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \pi/4 [t - \sin 4t/4]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi^2/4. \end{aligned}$$

Svar: $\pi^2/4$.