

Tentamensskrivning, 2005-08-24, kl 14.00-19.00

5B1115, 5B1135 Matematik I, för Bio, E, I, K, media, ME och Open

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 16, 22 och 30 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning.

Lösningsförslaget skall textförkaras Bristande läsbarhet medför poängavdrag.

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 5x}{\cos 3x - \cos 4x}$. (3p)
2. Visa med induktion att $4^n + 2$ är jämnt delbart med 3 för $n = 1, 2, 3, \dots$ (3p)
3. Bestäm det största och det minsta värde som antas av funktionen $f(x) = (x - 4)\sqrt{x - 1}$, då $1 \leq x \leq 5$. (3p)
4. Betrakta funktionen $f(x) = 4 \arcsin \sqrt{x} + 2 \arcsin \sqrt{1 - x}$.
 - a. Visa att f har en invers f^{-1} . (2p)
 - b. Bestäm största värdet av inversen $f^{-1}(x)$. (1p)
5. Bestäm en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter vars allmänna lösning ges av $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \cos^2 x$, där A och B är konstanter. (3p)
6. Ekvationen $x^3 - 3xy - y^3 + 3 = 0$ definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 1$.
 - a. Bestäm derivatan $y'(x)$ uttryckt i x och y . (1p)
 - b. Visa att $x = 1$ är en kritisk punkt till y . (1p)
 - c. Visa att $x = 1$ är en lokal extrempunkt till y och bestäm dess karaktär. (2p)
7. Bestäm den största volym, som en cylinder inskriven i en sfär med radien a , kan ha. (4p)
8. Låt a_n betyda arean av den triangel som tangenten till kurvan $y = x + x^2$ i punkten $(n, n + n^2)$ bildar med koordinataxlarna.
 - a. Beräkna a_n . (2p)
 - b. Undersök om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ är konvergent. (2p)

9. Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y = \frac{36}{4 - x^2} - 4$, dess normal i punkten $(0,5)$ och dess tangent i punkten $(1,8)$. (4p)

10. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som begränsas av x -axeln och kurvan $y = (x - 1)\sqrt{2x - x^2}$ roterar ett varv kring linjen $x = 1$. (4p)