

Tentamensskrivning, 2005-10-20, kl. 14⁰⁰–19⁰⁰.

5B1115 Matematik 1, för Media1.

Skriv namn och födelsennummer på varje blad. Endast en uppgift per blad.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Inga hjälpmedel!

1. Bevisa att

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

för alla naturliga tal $n \geq 4$. (3p)

2. Bestäm Taylorutvecklingen av fjärde graden av funktionen

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$$

kring $x = 0$. (3p)

3. Beräkna

$$\int_3^4 \frac{x \, dx}{x^2 - 3x + 2}. \quad (3p)$$

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 8y' + 7y = e^x. \quad (3p)$$

5. Vilka av de oändliga serierna

a) $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \cdots,$

b) $7 + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \cdots,$

c) $\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} + \cdots,$

konvergerar och mot vilka värden? (3p)

V.g. vänd!

6. Undersök för vilka tal $c \in \mathbb{R}$ funktionen f är deriverbar, då

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} + 1, & \text{om } x \neq 0, \\ c, & \text{om } x = 0. \end{cases} \quad (4p)$$

7. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} dx. \quad (4p)$$

8. Bestäm alla extrempunkter (och deras karaktär) för

$$f(x) := \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - x$$

i intervallet $[-3, -1]$. Finns det en extrempunkt i intervallet $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$? (4p)

9. Avgör för vilka α, β de generaliserade integralerna

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta},$

är konvergenta. (4p)

10. Hitta lösning(ar) till

$$2(y''''y - y'''y') + ((y'')^2 - y^2) = 0$$

genom att derivera differentialekvationen med avseende på x . (4p)