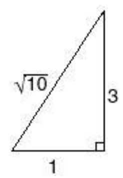
KTH Matematik.

Lösningar till tentamen i 5B1115 Matematik 1
för Bio, E, K och ME

1.

$$\cos(2\arctan 3) = \cos^2(\arctan 3) - \sin^2(\arctan 3) =$$
$$(\frac{1}{\sqrt{10}})^2 - (\frac{3}{\sqrt{10}})^2 = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = \underline{-\frac{4}{5}}.$$



2. Rotationsvolymen $= \pi \int_0^1 (x+\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1- x^2)dx = \pi \int_0^1 (2x\sqrt{1-x^2})dx + \pi \int_0^1 dx = \left[t^2 = 1-x^2,\ 2tdt = -2xdx\right] = \pi \int_1^0 (t\cdot(-2t)dt + \pi = \pi \int_0^1 2t^2 dt + \pi = \left[2\pi t^3/3\right]_0^1 + \pi = 2\pi/3 - 0 + \pi = \underline{5\pi/3}.$

3. $y'' - 4y' + 4y = x - 2x^2$
Homogen lösning: Lös karakt. ekvationen $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0, \quad r = 2$, dubbelrot.
(*) $\quad y_H = (Ax+B)e^{2x}$.
Partikulärlösning: Ansätt $y_P = ax^2+bx+x$ (Samma grad som högerledet, y saknas ej).
$y_P' = 2ax + b, \quad y_P'' = 2a$
ger i (*): $2a-4(2ax+b)+4(ax^2+bx+c) = 4ax^2+(4b-8a)x+2a-4b+4c = x - 2x^2$
Identifiering ger : $4a = -2, \quad 4b - 8a = 1, \quad 2a - 4b + 4c = 0$, varav
$a = -1/2, \quad b = (1+8a)/4 = -3/4, \quad c = b - a/2 = -3/4 + 1/4 = -1/2.$
Alltså, $y_P = -x^2/2 - 3x/4 - 1/2$.

Svar: $\underline{y = (Ax+B)e^{2x} - x^2/2 - 3x/4 - 1/2}$.

4. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = 3x^{-1/2} - 3x^{-3/2}. \quad x > 0.$

$y' = -\dfrac{3}{2}x^{-3/2} + \dfrac{3}{2}x^{-5/2} = \dfrac{3}{2}x^{-5/2}(-x+1).$

$y' = 0$ endast då $x = 1$.
$y' > 0$ då $0 < x < 1$, alltså är $y(x)$ växande där.
$y' < 0$ då $x > 0$, alltså är $y(x)$ avtagande där.
$y(1) = 2$.
$\underline{\text{Punkten } (1,2) \text{ är en lokal maxpunkt.}}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x} = \begin{bmatrix} \text{"0/0"} \\ \text{l'H} \end{bmatrix} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1/2} - x^{-2/3}}{2\ln x/x} =$
$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/2} - x^{1/3}}{2\ln x} = \begin{bmatrix} \text{"0/0"} \\ \text{l'H} \end{bmatrix} = \frac{(1/2)x^{-1/2} - (1/3)x^{-2/3}}{2/x} = \frac{1/2 - 1/3}{2} =$
$\underline{\dfrac{1}{12}}.$

Alt: (sätt $x = 1 + t$ och låt $t \to 0$):
$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 + 2\sqrt{1+t} - 3\sqrt[3]{1+t}}{\ln^2(1+t)} =$
$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 + 2(1 + t/2 + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}t^2) - 3(1 + t/3 + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!}t^2) + O(t^3)}{(t + O(t^2))^2} =$
$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 + 2 + t - 2\frac{1}{8}t^2 - 3 - t - 3\frac{(-1)}{9}t^2 + O(t^3)}{t^2 + O(t^3)} =$
$\displaystyle lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{3}t^2 + O(t^3)}{t^2 + O(t^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + O(t)}{1 + O(t)} = \underline{\frac{1}{12}}.$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \int_0^\infty \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}\right)dx = \begin{bmatrix} \text{Handpå-} \\ \text{läggning} \end{bmatrix} =$
$\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x+3}\right)dx =$
$\displaystyle\left[\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3|\right]_0^\infty = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3\right) =$
$\displaystyle\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+1/x}{1+3/x}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0}{1+0} + \frac{1}{2}\ln 3 = \underline{\frac{1}{2}\ln 3}.$

7. Påståendet som skall visas är $P(n) : 13^n + 6^{n+1}$ är delbart med 7 för alla hela tal $n \geq 0$.
Detta kan också formuleras:
$P(n) : 13^n + 6^{n+1} = 7k$ för något helt tal k (som beror av n och därför kan skrivas k_n),
Vi visar detta med induktionsbevis:

1. $P(0) : 13^0 + 6^{0+1} = 1 + 6 = 7 = 7 \cdot 1$, stämmer !

2. Antag:
(*) $\quad P(m) : 13^m + 6^{m+1} = 7k_m$.
(**) $\quad P(m+1) : 13^{m+1} + 6^{m+2} = 7k_{m+1}$ ska visas.
VL(**) $= 13^{m+1} + 6^{m+2} = 13 \cdot 13^m + 6 \cdot 6^{m+1} = 7 \cdot 13^m + 6 \cdot 13^m + 6 \cdot 6^{m+1} = 7 \cdot 13^m + 6(13^m + 6^{m+1}) = (*) = 7 \cdot 13^m + 7k_m = 7(13^m + k_m) = 7k_{m+1} =$ HL(**).
Vi har visat $P(0)$ och $P(m) => P(m+1)$.
Alltså gäller $P(n)$ för $n = 0, 1, 2, ...$. VSB.

8. Betrakta tangenten till kurvan $y = e^{-x^2}$ i punkten $(x, y)) = (t, e^{-t^2})$:
$y - e^{-t^2} = y'(t)(x - t)$. Eftersom $y'(x) = (-2x)e^{-x^2}$ får man
$y - e^{-t^2} = (-2t)e^{-t^2}(x - t)$. Antag tangenten skär y-axeln för $y = b(t)$, som man erhåller genom att sätta $x = 0$ i tangentens ekvation:
$b(t) - e^{-t^2} = (-2t)e^{-t^2}(0 - t), \quad b(t) = e^{-t^2} + 2t^2e^{-t^2} = e^{-t^2}(1 + 2t^2)$.
Vi maximerar $b(t)$ (Eftersom $y(x)$ är symmetrisk omkring y-axeln, räcker det med att betrakta $t \geq 0$).
$b'(t) = e^{-t^2}(4t) + (-2t)e^{-t^2}(1 + 2t^2) = e^{-t^2}(2t - 4t^3) = e^{-t^2}2t(1 - 2t^2)$.
$b'(t) = 0$ för $t = 0$ och $t = 1/\sqrt(2)$ i intervallet $t \geq 0$.
Teckenstudium:
$b'(t) > 0$ då $0 < t < 1/\sqrt{2}$ och $b(t)$ är alltså växande där.
$b'(t) < 0$ då $1/\sqrt{2} < t$ och $b(t)$ är alltså avtagande där.
Därför är $b(1/\sqrt{2}) = e^{-1/2}(1 + 1) = \underline{\dfrac{2}{\sqrt{e}}}$ det största värdet för b.

9. $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$ skall lösas.
Homogen lösning:
Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 5 = 0$, har lösningen $r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$,
varför homogena lösningen blir: $y_H = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Partikulärlösning:
$\sin 2x =$Im(e^{2ix}). Ersätt därför högerledet med e^{2ix} och bestäm en partikulärlösning till den komplexa ekvationen
(*) $y_*'' + 2y_*' + 5y_* = e^{2ix}$.
Det är inte resonans ($2i$ är inte en rot till karakteristiska ekvationen.).
Ansätt därför $y_* = ae^{2ix}$, där a är ett komplext tal.
Man får $y_*' = 2aie^{2ix}$, $y_*'' = -4ae^{2ix}$.
Insättning i (*) ger: $(-4a + 4ai + 5a)e^{2ix} = e^{2ix}$, $a(1+4i) = 1$,
$a = \dfrac{1}{1+4i} = \dfrac{1-4i}{17}$.
Den reella partikulärlösningen $y_P = \mathrm{Im}(\dfrac{1-4i}{17})e^{2ix} =$
$\mathrm{Im}(\dfrac{1-4i}{17})(\cos 2x + i\sin 2x) = \dfrac{\sin 2x}{17} - \dfrac{4\cos 2x}{17}$.
Den allmänna lösningen är alltså:
$y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \dfrac{\sin 2x}{17} - \dfrac{4\cos 2x}{17}$.
Randvillkoren $y(0) = y(\pi/4) = 0$ bestämmer A och B :
$y(0) = A - 4/17 = 0$, $A = 4/17$.
$y(\pi/4) = Be^{-\pi/4} + 1/17 = 0$, $B = -e^{\pi/4}/17$, dvs
$y(x) = \underline{e^{-x}(\dfrac{4\cos 2x}{17} - \dfrac{e^{\pi/4}\sin 2x}{17}) + \dfrac{\sin 2x}{17} - \dfrac{4\cos 2x}{17}}$.

Däremot ger randvillkoren $y(0) = y(\pi/2) = 0$ ingen lösning:
Man får $y(0) = 0$ och $A = 4/17$ som förut, men $y(\pi/2) = 0$ ger $-Ae^{-\pi/2} + 4/17 = 0$, vilket ger ett annat A-värde, $A = 4e^{\pi/2}/17$, vilket innebär en motsägelse.
En lösning som uppfyller det randvillkoret kan alltså inte existera.

10a. $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$

$I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ ska visas:

$I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \cdot \sin x dx = \big[Part.integr,\big] = \Big[\sin^{n+1} x(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} +$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n x \cos x \cdot \cos x dx =$

$0 - 0 + \displaystyle\int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n x(1-\sin^2 x)dx =$

$(n+1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x dx =$

$(n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}, \quad (n+2))I_{n+2} = (n+1)I_n.$

Alltså $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ VSV

10b. Man får lätt att

$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$ och $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$

Alltså :

$I_5 = \dfrac{4}{5} I_3 = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} I_1 = \underline{\dfrac{8}{15}} \quad I_6 = \dfrac{5}{6} I_4 = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} I_2 = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} I_0 = \underline{\dfrac{5\pi}{32}}$