

Institutionen för matematik.

KTH Matematik

Tentamen i Matematik 1, 5B1115, för Bio. E, K och ME
måndagen den 7/11 2005

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Om 15p uppnås finns möjlighet att komplettera inom tre veckor. Kontakta i så fall kursledare. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga motiveringar.

1. Förenkla uttrycket $\cos(2 \arctan 3)$ så långt som möjligt. (3p)

2. Bestäm volymen av den rotations kropp som uppstår då ytan definierad av $0 \leq y \leq x + \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, roterar omkring x-axeln. (3p)

3. Lös differentialekvationen:

$$y'' - 4y' + 4y = x - 2x^2 \quad (3p)$$

4. Bestäm alla lokala extrempunkter för funktionen

$$y = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad x > 0, \text{ samt ange deras karaktär.}$$

(3p)

5. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}{\ln^2 x}$.

(3p)

V.g. vänd!

6. Bestäm integralen $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$.

(4p)

7. Visa att $13^n + 6^{n+1}$ är delbart med 7 för $n = 0, 1, 2, \dots$.

(4p)

8. En tangent till kurvan $y = e^{-x^2}$ skär y-axeln i punkten $(0, b)$. Bestäm det största värde b kan anta.

(4p)

9. Betrakta differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$. Bestäm den lösning som uppfyller randvillkoren $y(0) = y(\pi/4) = 0$ samt visa att det inte finns någon lösning som uppfyller $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

(4p)

10 a. Sätt $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Visa att $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
 Ledning: Studera integralen $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x \cdot \sin x \, dx$.

(3p)

10 b. Bestäm I_5 och I_6 . Resultatet i 10a får användas.

(1p)