KTH Matematik.

# Lösningar till tentamen i 5B1115 Matematik 1
# för Bio, E, K, Media och ME

**1.**

$$(2x - \frac{1}{x^2})^{11} = \ldots \quad + \binom{11}{7}(2x)^7\left(-\frac{1}{x^2}\right)^4 + \quad \ldots =$$

$$= \quad \ldots + \binom{11}{7}2^7\frac{1}{x} + \quad \ldots .$$

Alltså, $\frac{1}{x}$-koeff. $= \binom{11}{7}2^7 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}2^7 = 330 \cdot 128 = \underline{42240}$.

**2.**

$$\int_0^{\pi}(2\sin^2 x + \sin^3 x)\ dx = \int_0^{\pi}\left(2\frac{1-\cos 2x}{2} - (1-\cos^2 x)(-\sin x)\right)dx =$$

$$\left[x - \frac{\sin 2x}{2} - (\cos x - \frac{\cos^3 x}{3})\right]_0^{\pi} = (\pi - 0 - (-1 - (-1)^3/3)) - (0 - 0 - (1 - 1/3)) =$$

$$\pi + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\pi + \frac{4}{3}}.$$

**3.**

(*) $\quad y'' - 9y = 5x + 1$

Homogen lösning: Lös karakt. ekvationen $r^2 - 9 = 0, \qquad r = \pm 3$ .

Alltså, $y_H = Ae^{3x} + Be^{-3x}$.

Partikulärlösning: Ansätt $y_P = ax + b$ (samma grad som högerledet, $y$ saknas ej).

$y_P' = a, \quad y_P'' = 0$

ger i (*): $-9(ax + b) = 5x + 1$ .

Identifiering ger : $-9a = 5, \quad -9b = 1$, varav

$a = -5/9, \quad b = -1/9$. Alltså, $y_P = -5x/9 - 1/9$.

Svar: $\underline{y = Ae^{3x} + Be^{-3x} - 5x/9 - 1/9}$.

**4.**

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln(2x)}{x^2}dx =$$

$$\left[-\frac{\ln(2x)}{x}\right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{2x}dx =$$

$$\left[-\frac{\ln(2x)}{x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} =$$

$$\left[-\frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln 2}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) - (-\ln(2) - 1) = \underline{\ln 2 + 1},$$

eftersom gränsvärdet = 0 (standardgränsvärden.)

**5.**

Implicit derivering av $x^2 + y = 2^y + x$ med avseende på $x$ ger:

$2x + y' = 2^y \ln 2 \cdot y' + 1. \qquad (\frac{d}{dy}2^y = \frac{d}{dy}e^{\ln 2 \cdot y} = \ln 2 \cdot 2^y.)$

Insättning av $(x, y) = (2, 2)$ ger:

$4 + y'(2) = 4 \ln 2 \cdot y'(2) + 1$ dvs $y'(2) = \dfrac{3}{4 \ln 2 - 1}$, vilket alltså är tangentens lutning.

Tangentens ekvation i punkten $(2, 2)$ blir alltså $\underline{y - 2 = \dfrac{3}{4 \ln 2 - 1}(x - 2)}$.

**6.**

Sätt $f(x) = ax - \ln x, \quad x > 0, \quad a > 0.$

Notera att $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$

Linjen $y = ax$ skär kurvan $y = \ln x$ om $f(x) \leq 0$ för något $x > 0$.

$f'(x) = a - \dfrac{1}{x} = 0$ endast för $x = \dfrac{1}{a}$.

Eftersom $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$, är $f''(1/a) = a^2 > 0$ och $f(1/a) = 1 + \ln a$ ett lokalt minimum som också är $f$:s minsta värde i intervallet $x > 0$.

Skärning äger alltså rum då $1 + \ln a \leq 0 \Leftrightarrow \ln a \leq -1 \Leftrightarrow \underline{a \leq e^{-1}}$.

**7.**

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \begin{bmatrix} s = e^t & , & ds = e^t dt \\ dt = \frac{ds}{s} & & \end{bmatrix} = \int_2^{e^x} \frac{ds}{s\sqrt{s-1}} =$$

$$\begin{bmatrix} u^2 = s - 1 \\ 2udu = ds \end{bmatrix} = \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{2udu}{(u^2+1)u} =$$

$$\int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \frac{2du}{u^2+1} =$$

$$\Big[2 \arctan u\Big]_1^{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - 2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Ekvationen $\displaystyle\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{\pi}{6}$ leder alltså till :

$2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ eller $\arctan \sqrt{e^x - 1} = (\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6})/2 = \dfrac{\pi}{3}$.

Man får $\arctan \sqrt{e^x - 1} = \arctan \sqrt{3}, \quad \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{3}, \quad e^x - 1 = 3$

och slutligen $\underline{x = \ln 4}$.

**8.**

Rotation kring x-axeln:

$V_x = \pi \int_0^1 y^2(x)\ dx = \pi \int_0^1 (1-x)^3\ dx =$

$\left[\pi(-1)\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = 0 - (-\frac{\pi}{4}) = \underline{\frac{\pi}{4}}.$

Rotation kring y-axeln:

Eftersom funktionen $y(x) = (1-x)^{3/2}$ är monoton
( $y'(x) = (-3/2)(1-x)^{1/2} < 0$ )
i $]0,1[$) så kan inversen $x(y)$ användas i formeln
$V_y = \pi \int_a^b x^2(y)\ dy$ för rotationskroppens volym $V_y$.
Gränserna $a$ och $b$ i integralen blir $a = y(1) = 0, \quad b = y(0) = 1$
$x(y)$ fås ur: $y = (1-x)^{3/2}, \quad y^{2/3} = 1-x, \quad x(y) = 1 - y^{2/3}$.
Alltså,

$V_y = \pi \int_0^1 (1-y^{2/3})^2\ dy = \pi \int_0^1 (1-2y^{2/3}+y^{4/3})\ dy = \pi \left[y - (6/5)y^{5/3} + (3/7)y^{7/3}\right]_0^1 =$

$\pi(1 - 6/5 + 3/7 - 0) = \underline{\frac{8\pi}{35}}.$

**Svar:** $V_x = \frac{\pi}{4}$ (rotation kring x-axeln), $\quad V_y = \frac{8\pi}{35}$ (rotation kring y-axeln).

**9.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x} + x^2\right)}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left((x - x^3/6 + O(x^5))/x + x^2\right)}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + 5x^2/6 + O(x^4)\right)}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(5x^2/6 + O(x^4)) =$$

$$\lim_{x\to 0} (5/6 + O(x^2)) = \underline{\frac{5}{6}}.$$

**10.**

Sätt $F(x) = x^2 + 1 - 2^x$. $\quad F(x) \le 0$ då $0 \le x \le 1$ ska visas.
$F(0) = F(1) = 0$.
$F' = 2x - \ln 2 \cdot 2^x, \quad F'' = 2 - \ln^2 2 \cdot 2^x = 2(1 - \ln^2 2 \cdot 2^{x-1})$.
$F''(x) > 0$ i $[0,1]$, eftersom $0 < \ln^2 2 < 1$ och $2^{x-1} \le 1$ i $[0,1]$.
Alltså är $F'(x)$ växande i $[0,1]$.
Eftersom $F'(0) = -\ln 2 < 0$, $F'(1) = 2(1-\ln 2) > 0$ och $F'(x)$ är kontinuerlig finns precis ett tal $c$ i $]0,1[$ så att $F'(c) = 0$.
Man får teckentabellen:

| | $0$ | | $c$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ |
| $F'$ | $< 0$ | - | $0$ | $+$ | $> 0$ |

som visar att $F(x) \le 0$ i $[0,1]$, VSB.