Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2006-10-19, kl. 14:00-19:00
5B1115 Matematik 1, för Media1

Skriv ditt namn och födelsenummer påvarje blad. Endast en uppgift per blad.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Inga hjälpmedel!

1. Bevisa att (3p)
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}$$
för alla naturliga tal n.

2. Beräkna (3p)
$$\int_2^3 \frac{x\ dx}{x^2 - 5x + 4}.$$

3. Bestäm (3p)
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1 - x^7}{1 - x} \right)$$
utan att använda l'Hospital's regel.

4. Beräkna (3p)
$$\int_0^{\pi/2} \cos x\ (\sin x)^3 dx.$$

5. Beräkna den oändliga serien (3p)
$$\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!} - \frac{(\frac{\pi}{2})^7}{7!} + \dots$$

6. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (4p)
$$y'' - 6y' + 5y = 4x + e^{2x}$$

7. Bevisa med hjälp av Eulers formel ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) att (4p)

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

och

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

8. Bestäm (4p)

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10} \quad \text{eller} \quad \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} \ln x \, dx$$

9. Bestäm alla extrempunkter (och deras karaktär) till (4p)

$$f(x) = -\frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^6 - \frac{4}{5}x^5$$

i intervallet $[0, 2]$.

10. Bevisa att båglängden (4p)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

är oberoende av parametrisering, dvs att formeln är invariant mot substitutionen $\tilde{t} = f(t)$ (då derivatan $\dot{f} = \frac{d\tilde{t}}{dt} > 0$; använd notationen $x(t) = \tilde{x}(f(t)),\ y(t) = \tilde{y}(f(t))$).