KTH Matematik.

Lösningar till tentamen i 5B1115 Matematik 1 för Bio och K den 6/11 2006

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2x^2-(1-(3x)^2/2)+O(x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{13x^2/2+O(x^4)}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{13/2+O(x^2)}{1} = \underline{13/2}.$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9x+20} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+4)(x+5)} = \int_0^\infty \left(\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+5}\right)dx =$$
$$\left[A(x+5)+B(x+4)\equiv 1 \quad \text{ger } A+B=0, \quad 5A+4B=1, \right.$$
$$\left. \text{varav } A=1, B=-1\right] =$$
$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)dx = \Big[\ln|x+4|-\ln|x+5|\Big]_0^\infty$$
$$\left[\ln\frac{|x+4|}{|x+5|}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+4/x}{1+5/x} - \ln\frac{4}{5} = \ln 1 + \ln\frac{5}{4} = \underline{\ln\frac{5}{4}}.$$

3. $f(x) = x^2e^{-2x}$. Värdemängden skall undersökas på intervallet $x \geq 0$.
$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2\cdot(-2e^{-2x}) = 2e^{-2x}(x-x^2) = 2e^{-2x}\cdot x(1-x)$.
Man får alltså att
$f'(0) = 0$,
$f'(x) > 0$ för $0 < x < 1$, dvs f är växande där.
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ för $x > 0$, dvs f är avtagande där. Dessutom inses att $f(x) = x^2e^{-2x}$ måste vara ≥ 0 för alla x.
Av ovanstående framgår att f har ett minsta värde, $f(0) = 0$ och ett största värde $f(1) = e^{-2}$.
Eftersom f är kontinuerlig (det är en elementär funktion) och kontinuerliga funktioner antar alla mellanliggande värden mellan två funktionsvärden gäller att f:s värdemängd $\underline{V_f = [0, e^{-2}]}$.

4. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+3n+4}) =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+3n+4})(\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+3n+4})}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+3n+4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3-(n^2+3n+4)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+3n+4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n-1}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+3n+4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1-1/n}{\sqrt{1+2/n+3/n^2}+\sqrt{1+3/n+4/n^2}} = \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \underline{-1/2}$$

Alternativ lösning med MacLaurinutveckling: $(1+x)^{1/2} = 1+x/2+O(x^2)$.
$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+3n+4}) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{1+2/n+3/n^2}-\sqrt{1+3/n+4/n^2}) =$
$\lim_{n\to\infty} n(1+1/n-(1+3/2n)+O(1/n^2)) = \lim_{n\to\infty}(n+1-n-3/2+O(1/n)) = -1/2.$

5. Den sökta volymen är:

$$V = \pi\int_0^1 y^2\ dx = \pi\int_0^1 \frac{x^2\ dx}{x^2+9} = \pi\int_0^1 \frac{(x^2+9-9)dx}{x^2+9} =$$

$$\pi\int_0^1 (1-\frac{9}{x^2+9})\ dx = \pi\int_0^1 (1-\frac{1}{(x/3)^2+1})\ dx = \pi\Big[x-3\arctan(x/3)\Big]_0^1 =$$

$$\pi - 3\pi\arctan(1/3) - 0 - 0 = \underline{\pi - 3\pi\arctan(1/3)}.$$

6. (*) $\quad y'' + 4y' + 5y = x^2+1$
Homogen lösning: Lös karakt. ekvationen $r^2+4r+5=0$,
$r = -2\pm\sqrt{4-5} = -2\pm i$.
$y_H = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$..
Partikulärlösning: Ansätt $y_P = ax^2+bx+x$ (Samma grad som högerledet, y saknas ej).
$y_P' = 2ax+b, \quad y_P'' = 2a$
ger i (*): $2a+4(2ax+b)+5(ax^2+bx+c) = 5ax^2+(5b+8a)x+2a+4b+5c \equiv x^2+1$
Identifiering ger : $5a = 1, \quad 5b+8a = 0, \quad 2a+4b+5c = 1$, varav
$a = 1/5, \quad b = -8a/5 = -8/25, \quad c = (1-2a-4b)/5 = 47/125.$
Alltså, $y_P = x^2/5 - 8x/25 + 47/125$.
Bestämning av A och B ur begynnelsevillkoren $y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1$. Man får $y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + x^2/5 - 8x/25 + 47/125$. och
$y' = e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x) + 2x/5 - 8/25.$

$y(0) = A + 47/125 = 0$ ger $A = -47/125$.
$y'(0) = -2A + B - 8/25 = 1$ ger $B = 1 + 8/25 - 94/125 = (125 + 40 - 94)/125 = 71/125$.

Svar: $\underline{y = e^{-2x}(-(47/125)\cos x + (71/125)\sin x) + x^2/5 - 8x/25 + 47/125}$.

7. Påståendet som skall visas är

$P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi visar detta med induktionsbevis:

1. $P(1) : 1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1.$ Stämmer !

2. Antag:

(*) $\quad P(m) : 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = \dfrac{m^2(m+1)^2}{4}$..

(**) $\quad P(m+1) : 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 = \dfrac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$ ska visas.

VL(**) $= 1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + (m+1)^3 =$ [Induktionsantagandet] $=$

$$\frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 = (m+1)^2\left(\frac{m^2}{4} + m + 1\right) =$$

$$(m+1)^2\left(\frac{m^2+4m+4}{4}\right) = \frac{(m+1)^2(m+2)^4}{4} = HL(**)$$

Alltså, om $P(m)$ så $P(m+1)$.

Alltså gäller $P(n)$ för $n = 1, 2, \ldots$. VSB.

8. $y(x)$ definieras av (*) $\quad y^2 + (x+3)y = 5x + 8$ och $y(-1) = 1$.

Taylorutveckling omkring $x = -1$ skall utföras till och med andragradstermen.

Implicit derivering av (*) ger:

$2yy' + y + (x+3)y' = 5.$ Insättning av $x = -1$ och $y = 1$ ger:

$2y' + 1 + 2y' = 5, \quad 4y' = 4, \quad y' = y'(-1) = 1.$

Fortsatt implicit derivering ger:

$2(y')^2 + 2yy'' + y' + y' + (x+3)y'' = 0.$ Insättning av $x = -1, y = 1$ och $y' = 1$ ger:

$2 + 2y'' + 1 + 1 + 2y'' = 0, \quad 4y'' = -4, \quad y''(-1) = -1.$

Taylorutveckling omkring $x = -1$ ger alltså:

$\underline{y(x) = 1 + (x+1) - (1/2)(x+1)^2 + R_2}.$

9a. Sätt $f(x) = x^2 e^{-x}$.

För att visa konvergens för serien $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ räcker det att visa att den generaliserade integralen $I_M = \int_M^{\infty} f(x)dx$ är konvergent , där M väljs så att $f(x)$ är positiv och avtagande för $x > M$.

$f(x)$ är positiv för $x > 0$.

Eftersom $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2-x) < 0$ för $x > 2$ är f avtagande för $x > 2$.

Vi beräknar

$$I_2 = \int_2^{\infty} x^2 e^{-x} dx = [\text{ partiell integration }] =$$

$$\Big[-x^2 e^{-x}\Big]_2^{\infty} + \int_2^{\infty} 2xe^{-x} dx =$$

$$\Big[-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x}\Big]_2^{\infty} + \int_2^{\infty} 2e^{-x} dx =$$

$$\Big[-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\Big]_2^{\infty} = -\Big[e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\Big]_2^{\infty}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-2} \cdot 10 = 0 + 10e^{-2} = 10e^{-2}, \text{ konvergent.}$$

Alltså är också den givna serien konvergent. VSV.

9b. Eftersom $f(x)$ (från 9a.) är avtagande för $x > 2$ gäller olikheten:

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^2 e^{-n} \le \int_2^{\infty} x^2 e^{-x} dx = I_2.$$

(Man kan tänka sig seriesumman som en summa rektanglar med bredden 1, där rektangel nr. n är placerad till vänster om $x = n$ på x-axeln.)

För hela serien S gäller alltså:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} = e^{-1} + 4e^{-2} + \sum_{n=3}^{\infty} n^2 e^{-n} \le e^{-1} + 4e^{-2} + I_2 = e^{-1} + 4e^{-2} + 10e^{-2} =$$

$$e^{-1} + 14e^{-2} < e^{-1} + 15e^{-2}, \quad \text{VSV.}$$

10. Vi skall visa att det för alla a och för alla $\epsilon > 0$ finns ett δ så att:

(*) Om $|h| < \delta$ så gäller $|\sin(a+h) - \sin a| < \epsilon$.

Studera först den sista olikheten. Det gäller att finna ett δ så att olikheten $|\sin(a+h) - \sin a| < \epsilon$ är uppfylld.

Vi kan anta att $|h| \leq 1$ så att

1) $\cos h \geq 0$ och $h^2 \leq |h|$.

Dessutom kan vi använda

2) $|A + B| \leq |A| + |B|$ (triangelolikheten,

3) $|\sin x| \leq |x|$.

4) $|\sin x| \leq 1$ och $|\cos x| \leq 1$

Då gäller.

$$|\sin(a+h) - \sin a| = |\sin a \cos h + \sin h \cos a - \sin a| =$$
$$|\sin a(\cos h - 1) + \sin h \cos a| \leq^{2)} |\sin a(\cos h - 1)| + |\sin h \cos a| =$$
$$|\sin a|\left|\frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{(\cos h + 1)}\right| + |\sin h \cos a| =$$
$$|\sin a|\left|\frac{\sin^2 h}{1 + \cos h}\right| + |\sin h| \cdot |\cos a| \leq^{1,3,4)} h^2 + |h| \leq^{1)} 2|h|.$$

Alltså gäller följande:

Om $|h| < \delta = \epsilon/2$ så $|\sin(a+h) - \sin a| < \epsilon$.

Därmed har vi till varje ϵ hittat ett δ (nämligen $\epsilon/2$) så att villkoret (*) gäller. VSB

Anm: Eftersom vi har hittat ett δ som fungerar för alla $\epsilon > 0$ <u>och</u> för alla a har vi i själva verket visat den starkare egenskapen att sin är en <u>likformigt</u> kontinuerlig funktion.