

Institutionen för matematik.  
**KTH Matematik**

Tentamen i Matematik 1, 5B1115, för Bio och K,  
måndagen den 6/11 2006

Inga hjälpmedel tillåtna.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Om 15p uppnås finns möjlighet att komplettera inom tre veckor. Kontakta i så fall kursledare. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga motiveringar.

1. Bestäm  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - \cos 3x}{x^2}$ . (3p)

2. Bestäm den generaliserade integralen  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9x + 20}$ . (3p)

3. Bestäm största och minsta värdet (om dessa värden existerar) av funktionen  $f(x) = x^2 e^{-2x}$ , på intervallet  $x \geq 0$ . (3p)

4. Bestäm gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + 3n + 4})$ . (3p)

5. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då ytan definierad av  $0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , roterar omkring x-axeln. (3p)

V.g. vänd!

6. Bestäm lösningen till differentialekvationen  $y'' + 4y' + 5y = x^2 + 1$  med begynnelsevärdena  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . (4p)

7. Visa att

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

för  $n = 1, 2, 3, \dots$ . (4p)

8. Taylorutveckla omkring  $x = -1$ , till och med andra graden, den funktion  $y(x)$  som definieras implicit av ekvationen  $y^2 + (x+3)y = 5x + 8$  och som uppfyller  $y(-1) = 1$ .

(4p)

- 9a. Visa att summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$$

är konvergent, t.ex. med en större integral. (2p)

- 9b. Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} < e^{-1} + 15e^{-2}.$$

(2p)

- 10 Visa med hjälp av definitionen för ett gränsvärde att  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ , för alla  $a$ .

Det är tillåtet att utan bevis använda olikheten  $|\sin x| \leq |x|$  och triangelolikheten  $|b + c| \leq |b| + |c|$ . (4p)