KTH Matematik

Lösningar till tentamen i Matematik I, 5B1115, 070108

1. Lös ekvationen
$(*) \quad \sqrt{8x^2 - 7} = 3x + 4.$
Kvadrering ger:
$8x^2 - 7 = (3x + 4)^2$
$8x^2 - 7 = 9x^2 + 24x + 16$
$x^2 + 24x + 23 = 0$
$x = -12 \pm \sqrt{144 - 23} = -12 \pm \sqrt{121} = -12 \pm 11.$
$x_1 = -1, \quad x_2 = -23$
Prövning i $(*)$:
$x_1 = -1$ ger $VL = \sqrt{1} = 1 = HL$, stämmer.
$x_2 = -23$ ger $VL > 0$, $HL = -65 < 0$, slopas.
Svar: $\underline{x = -1}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$. $f'(x)$ skall bestämmas med hjälp av derivatans definition.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2+3(x+h)} - \frac{1}{2+3x}\right) =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2+3x-(2+3(x+h))}{(2+3(x+h))(2+3x)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-3h}{(2+3(x+h))(2+3x)} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+3(x+h))(2+3x)} = \underline{-\frac{3}{(2+3x)^2}}\,.$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - 2\sin x}{x^2}$ skall bestämmas.

Vi använder MacLaurinutvecklingarna
$\ln(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ och
$\sin t = t + O(t^3)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - (2x)^2/2 - 2x + O(x^3)}{x^2} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{-2x^2 + O(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 + O(x)}{1} = \underline{-2}.$$

V.g. vänd!

4. Att visa,

$A(n)$: talet $5^n + 3$ är jämnt delbart med 4 för $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Med induktionsbevis:

1. $A(0): \; 5^0 + 3 = 4$ är jämnt delbart med 4, sant.

2. Visa att $A(m) \Rightarrow A(m+1)$.
Antag $A(m): \; 5^m + 3 = 4k$ för något helt tal k.
$A(m+1): \; 5^{m+1} + 3 = 4k_1$ för något helt tal k_1 ska visas.
$VL_{m+1} = 5^{m+1} + 3 = 5 \cdot 5^m + 3 = 5(5^m + 3) - 5 \cdot 3 + 3 = 5(5^m + 3) - 12 =$
$[\text{ Indiktionsantagandet}] = \quad 5 \cdot 4k - 12 = 4(5k - 3) = 4k_1 = HL_{m+1}$

Alltså, 1. och 2. visat och därmed gäller $A(n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ enligt induktionsaxiomet. VSB.

Alternativt bevis:

$5^n + 3 = 5^n - 1^n + 4 = (5-1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1) + 4 = 4k, \quad$ VSB.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$g(x) = 3\ln(3 + 2x) - 2\ln(1 + 2x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

Eftersom g är kontinuerlig på ett slutet, begränsat intervall, måste ett största och ett minsta värde existera.

$$g'(x) = \frac{6}{3+2x} - \frac{4}{1+2x} = \frac{6(1+2x) - 4(3+2x)}{(3+2x)(1+2x)} = \frac{4x-6}{(3+2x)(1+2x)}.$$

Man får $g' < 0$, dvs g avtagande, för $0 \leq x < 3/2$ och

$g' > 0$, dvs g växande, för $3/2 < x \leq 2$.

$g(3/2) = 3\ln 6 - 2\ln 3 = 3\ln 3 + 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 3^3 - \ln 2 = \ln(27/2)$ är minsta värdet.

Största värdet måste antas i någon av ändpunkterna:

$g(0) = 3\ln 3 - 2\ln 1 = \ln 27$,

$g(2) = 3\ln 7 - 2\ln 5 = \ln(7^3/5^2) = \ln(343/25) < \ln 20 < \ln 27$.

Svar: $\underline{\text{Största värdet} = g(0) = \ln 27, \;\; \text{minsta värdet} = g(3/2) = \ln(27/2).}$

6. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då ytan definierad av $0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $2 \leq x$, roterar omkring x-axeln.

Man får $V = \pi \displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1} =$

$$\pi \int_2^\infty \frac{dx}{(x+1)(x-1)} = \pi \int_2^\infty \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} \right) dx =$$

$$(\pi/2) \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1| \Big]_2^\infty = (\pi/2) \left[\ln \frac{|x-1|}{|x+1|} \right]_2^\infty =$$

$$(\pi/2) \left(\lim_{x \to \infty} \ln \frac{|1-1/x|}{|1+1/x|} - \ln \frac{1}{3} \right) = (\pi/2)(\ln 1 - \ln \frac{1}{3}) = \underline{\frac{\pi \ln 3}{2}}.$$

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, som uppfyller villkoren $y(0) = y'(0) = 0$

Homogen lösning y_H :

Karakteristiska ekvationen: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ ger dubbelroten $r = 1$.

Man får homogena lösningen $y_H = (Ax + B)e^x$.

Partikulärlösning y_P:

Karakteristisk rot $r = 1$ och högerled e^{2x} ger ingen resonans. Vi kan ansätta $y = ae^{2x}$ (a konstant) som partikulärlösning.

Insättning: $y' = 2ae^{2x}$, $y'' = 4ae^{2x}$ ger $y'' - 2y' + y = (4a - 4a + a)e^{2x} = e^{2x}$ dvs $a = 1$.

Alltså $y_P = e^{2x}$.

Allmän lösning $y = y_H + y_P = (Ax+B)e^x + e^{2x}$, $y' = (Ax+B+A)e^x + 2e^{2x}$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $B + 1 = 0$, $B = -1$.

Begynnelsevillkoret $y'(0) = 0$ ger $B + A + 2 = A + 1 = 0$, $A = -1$.

Den sökta lösningen är alltså $\underline{y = e^{2x} - (x+1)e^x}$.

V.g. vänd!

8. Visa att $F(x) = \ln\sqrt{x^2+x+1} + \dfrac{1}{2x} > 1$ för $x > 0$.

Vi studerar derivatans tecken:

Notera först att $F(x) = (1/2)\ln(x^2+x+1) + \dfrac{1}{2x}$.

$$F'(x) = (1/2)\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2(2x+1)-(x^2+x+1)}{2x^2(x^2+x+1)} = \frac{2x^3+x^2-x^2-x-1}{2x^2(x^2+x+1)} = \frac{2x^3-x-1}{2x^2(x^2+x+1)}.$$

Täljaren $2x^3-x-1$ har 0-stället $x=1$ och alltså faktorn $(x-1)$.

Faktorisering ger: $2x^3-x-1 = (x-1)(2x^2+2x+1)$. Notera att $2x^2+2x+1 = x^2+(x+1)^2 > 0$

Alltså $F'(x) = \dfrac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{2x^2(x^2+x+1)}$.

Täljarens enda 0-ställen är $x = 1$.

Teckenstudium ger:

$F' < 0$, dvs F är strikt avtagande, för $0 < x < 1$ och

$F' > 0$, dvs F är strikt växande, för $x > 1$.

Det gäller alltså att $F(x) > F(1)$. då $x > 0$.

Men $F(1) = \ln\sqrt{3} + 1/2 = (1/2)\ln 3 + 1/2 > 1/2 + 1/2 = 1$ (eftersom $3 > e$) VSV.

9. Visa att $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^3}} \le \frac{\pi}{6} \le \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^4}$.

Vi visar först att

$$(*) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^3}} \le \frac{\pi}{6}.$$

Följande gäller i integrationsintervallet $0 \le x \le 1$:

$$x^3 \le x^2, \quad 4-x^3 \ge 4-x^2, \quad \frac{1}{\sqrt{4-x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Alltså,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^3}} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2/4}} = \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-(x/2)^2}} = \left[\frac{1}{2}\cdot 2\arcsin(x/2)\right]_0^1 = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}. \quad \text{VSV}$$

För att visa

$$(**) \quad \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^4} \ge \frac{\pi}{6}$$

använder vi på motsvarande sätt olikheter i intervallet $0 \le x \le \sqrt{3}/2$:

$$x^4 \le x^2, \quad 1+4x^4 \le 1+4x^2, \quad \frac{1}{1+4x^4} \ge \frac{1}{1+4x^2}.$$

Alltså,

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^4} \ \geq \ \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+(2x)^2} =$$

$$\Big[(1/2)\arctan(2x)\Big]_0^{\sqrt{3}/2} = (1/2)\arctan(\sqrt{3}) = (1/2)(\pi/3) = \frac{\pi}{6}. \quad \text{VSV}$$

10. Bestäm det värde på $a > 1$ för vilket kurvorna $y = f(x) = a^x$ och $y = g(x) = {}^a\log x$ tangerar varandra i en punkt på linjen $y = x$.

Antag att tangeringen sker i punkten (X, X).

Eftersom kurvorna tangerar varandra i punkten (X, X) gäller $f'(X) = g'(X)$ och eftersom $a > 1$ är de båda funktionerna f och g växande, dvs .$f'(X) = g'(X) > 0$. Dessutom är de varandras inverser, varför $f'(X)g'(X) = 1$ måste gälla. Detta medför att $(f'(X))^2 = 1$ och $f'(X) = 1$.

Vi använder att

(1) $\quad a^X = X \qquad (f(X) = X)$. och

(2) $\quad a^X \cdot \ln a = 1 \qquad (f'(X) = 1$, $\quad$ notera att $a^x = e^{x \ln a})$.

(1) och (2) ger: $\qquad X \ln a = 1, \quad \ln a = 1/X, \quad a = e^{1/X}$.

Alltså $X = a^X = \left(e^{1/X}\right)^X = e^1 = e$.

Och $a = e^{1/X} = e^{1/e}$.

Svar: $\underline{a = e^{1/e}} \approx 1.445$.