Institutionen för Matematik, KTH

Lösningar till tentamen i Matematik I för I (5B1135)

6/11 2006

1. Vi har Maclaurinutvecklingarna

$$e^y = 1 + yB_1(y),$$
$$\cos x = 1 - x^2 B_2(x)$$

där B_1 och B_2 är begränsade funktioner. Detta ger

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x} = \frac{1 + x^2 B_1(x^2) - 1 + x^2 B_2(x)}{x} = x\big(B_1(x^2) + B_2(x)\big) \to 0$$

då $x \to 0+$.

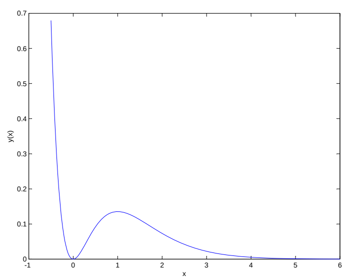
2. Tvärsnittsarean blir $A(x) = \pi x e^{2x}$. Volymen, V, är integralen av tvärsnittsarean från $x = 0$ till $x = 1$ och vi får med partiell integration

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \pi \int_0^1 xe^{2x} dx = \pi \Big[xe^{2x}/2\Big]_0^1 - \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2x} dx = \pi(e^2+1)/4.$$

3. Funktionen $y(x) = x^2 e^{-2x}$ är definierad för alla reella x, den är positiv och $x = 0$ är dess enda nollställe. Vi ser att $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ och $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \infty$. Vi har derivatan $y'(x) = e^{-2x}(2x - 2x^2) = 2e^{-2x}x(1-x)$. Detta ger teckenschemat och skissen

Teckenschema

x		0		1	
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$



Vi ser att y har ett globalt minimivärde $y(0) = 0$ och ett lokalt maximivärde $y(1) = e^{-2}$.

4. Funktkionskurvan har derivatan $y'(x) = 1 - 1/x^2$. Antag att tangentpunkten är x_0. Då är tangentens ekvation $y = x_0 + x_0^{-1} + (1 - x_0^{-2})(x - x_0)$ och villkoret att punkten $(0, 1)$ ligger på tangenten ger ekvationen $1 = x_0 + x_0^{-1} + (1 - x_0^{-2})(-x_0)$ som förenklas till $1 = 2/x_0$ vilket ger tangentpunkten $x_0 = 2$. Den sökta tangenten har därför ekvationen $y = 1 + 3x/4$.

5. Vi ska använda induktion för att visa att

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{1}$$

gäller för $n = 1, 2, 3, \ldots$ och delar upp beviset i tre steg. Steg 1: Vi ser att (1) är sant för $n = 1$ ty vänsterledet blir då $1/2$ och högerledet är också $1/2$. Steg 2: Vi antar nu att (1) är sant för $n = p - 1$, dvs

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(p-1)p} = \frac{p-1}{p} \tag{2}$$

och ska visa att detta leder till att (1) är sant för $n = p$. Vi får med hjälp av induktionsantagandet (2) att

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(p-1)p} + \frac{1}{p(p+1)} &= \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p(p+1)} \\ &= \frac{1}{p}\Big(p - 1 + \frac{1}{p+1}\Big) = \frac{p^2 - 1 + 1}{p(p+1)} = \frac{p}{p+1} \end{aligned}$$

och vi ser att (1) gäller också för $n = p$. Steg 3: Induktionsprincipen och steg 1 och 2 ovan visar nu att (1) gäller för alla positiva heltal.

6. Låt ϵ vara ett (litet) positivt tal. Vi ska bestämma hur stort n måste vara för att

$$n^{-1/100} < \epsilon. \tag{3}$$

Vi ser att (3) är ekvivalent med att $n > \epsilon^{-100}$ och får då

$$n > \epsilon^{-100} \implies |n^{-1/100}| < \epsilon$$

vilket visar att $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/100} = 0$ med gränsvärdets definition.

7. Den karakterisktiska polynomekvationen är $r^2 + 4 = 0$, som har lösningarna $r = \pm 2i$. Detta ger de homogena lösningarna $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$, för godtyckliga konstanter A och B. En partikulär lösningsansats är $y_p = C + Dx$ vilket insatt i differentialekvationen ger $0 + 4(C + Dx) = x$ som har lösningen $C = 0,\ D = 1/4$. Den allmänna lösningen är därför $y = x/4 + A\cos 2x + B\sin 2x$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A \\ 1 &= y'(0) = 1/4 + 2B \end{aligned}$$

som har lösningen $A = 0,\ B = 3/8$ och vi får differentialekvationens lösning $y = (2x + 3\sin 2x)/8$.

8. Den totala intäkten, I, av sålda produkter är $I(x) = xy(x), \quad x \geq 0$. Dess derivata blir

$$I' = \frac{10}{1+x^2} - \frac{10x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{10}{(1+x^2)^2}(1 + x^2 - 2x^2) = 10\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

som har nollstället $x = 1$. Vi ser att $I(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} I(x) = 0$. Vi får teckenschemat

Teckenschema

x		1	
$I'(x)$	$+$	0	$-$
$I(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$

som visar att I har ett globalt maximumvärde $I(1) = 5$ och det optimal priset är $x = 1$.

9. Vi börjar med att betrakta funktionen $y(x) = x^2 e^{-x}$ för $x \geq 0$. Funktionen y är positiv, har nollstället $x = 0$ och gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. Den är därför inte monoton. Vi har $y'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ som har nollställen $x = 0$ och $x = 2$. Teckenstudie av y', som i uppgift 3, visar att y är växande för $0 \leq x \leq 2$ och avtagande för $x \geq 2$. Vi kan därför uppskatta summan med integralen enligt $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 e^{-n} < \int_2^{\infty} x^2 e^{-x} dx$. Vi beräknar integralen med partiell integration

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} x^2 e^{-x} dx &= \big[-x^2 e^{-x}\big]_2^{\infty} + \int_2^{\infty} 2xe^{-x} dx \\ &= 4e^{-2} + \big[-2xe^{-x}\big]_2^{\infty} + \int_2^{\infty} 2e^{-x} dx \\ &= 8e^{-2} + \big[-2e^{-x}\big]_0^{\infty} = 10e^{-2}.\end{aligned}$$

Detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} = e^{-1} + 4e^{-2} + \sum_{n=3}^{\infty} n^2 e^{-n} < e^{-1} + 4e^{-2} + 10e^{-2} = e^{-1} + 14e^{-2},$$

vilket löser uppgift 9b. Eftersom alla termer i summan är positiva och summan är begränsad måste summan också vara konvergent.

10. Se kursboken.