Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen i Matematik I för I (5B1135)

6/11 2006

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Råd: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Tentamen har 10 uppgifter på tre sidor. Sexton poäng med bonus räcker säkert för godkänt. Lycka till!

1. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x} \ .$$

(3 poäng)

2. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår när ytan definierad av

$$0 \leq y \leq \sqrt{x} e^x, \ 0 \leq x \leq 1,$$

roterar omkring x-axeln. (3 poäng)

3. Skissera kurvan $y = x^2 e^{-2x}$. Ange också funktionskurvans lokala och globala extrempunkter, nollställen och gränsvärden när $x \to \pm\infty$, om de finns.

(3 poäng)

4. Betrakta tangenterna till kurvan $y = x + 1/x, \ x > 1/10$. Bestäm den tangent som går genom punkten $x = 0, \ y = 1$ (som inte är en punkt på kurvan). (3 poäng)

5. Låt n vara ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

(3 poäng)

6. Visa med gränsvärdets definition att

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/100}=0.$$

(4 poäng)

7. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y''+4y=x$$

med begynnelsevärdet $y(0)=0,\ y'(0)=1.$ (4 poäng)

8. En försäljare har kommit fram till att antalet, y, sålda produkter beror på försäljningspriset, x, enligt

$$y(x)=\frac{10}{1+x^2}\ .$$

Hur ska priset väljas för att maximera totala intäkten av sålda produker? (4 poäng)

9a. Visa att summan

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$$

är konvergent, t.ex. med en större integral. (2 poäng)

9b. Visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}<e^{-1}+15e^{-2}.$$

(2 poäng)

10. Formulera och bevisa Analysens Huvudsats. (4 poäng)

Alternativ uppgift 10. Visa med hjälp av integralens definition att en likformigt kontinuerligt funktion är integrerbar över ett begränsat intervall. (högst en uppgift 10 får lämnas in)

(4 poäng)