KTH Matematik

Kortfattade lösningar till tentamen i Matematik 1, 5B1135, 070108

1. Lös ekvationen
$(*)\quad \sqrt{8x^2-7} = 3x+4.$
Kvadrering ger:
$8x^2 - 7 = (3x+4)^2$
$8x^2 - 7 = 9x^2 + 24x + 16$
$x^2 + 24x + 23 = 0$
$x = -12 \pm \sqrt{144-23} = -12 \pm \sqrt{121} = -12 \pm 11.$
$x_1 = -1, \quad x_2 = -23$
Prövning i $(*)$:
$x_1 = -1$ ger $VL = \sqrt{1} = 1 = HL,$ stämmer.
$x_2 = -23$ ger $VL > 0,\ HL = -65 < 0,$ slopas.
Svar: $\underline{x = -1}$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - 2\sin x}{x^2}$ skall bestämmas.

Vi använder MacLaurinutvecklingarna

$$\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3 B_1(t),$$
$$\sin t = t + t^3 B_2(t),$$

där B_1 och B_2 är begränsade funktioner i en omgivning av 0. Vi får

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2\sin x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - (2x)^2/2 - 2x + x^3 B_3(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + x^3 B_3(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2 + xB_3(x)}{1} = -2,\end{aligned}$$

där B_3 är en begränsad funktion i en omgivning till 0. Det sökta gränsvärdet är alltså -2.

3. Vi har $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$. Funktionen $f'(x)$ skall bestämms med hjälp av derivatans definition:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2+3(x+h)} - \frac{1}{2+3x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{2+3x-\big(2+3(x+h)\big)}{\big(2+3(x+h)\big)(2+3x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-3h}{\big(2+3(x+h)\big)(2+3x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{\big(2+3(x+h)\big)(2+3x)} \\
&= -\frac{3}{(2+3x)^2}.
\end{aligned}
$$

Alternativ uppgift 3. Gränsvärdets definition för $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ betyder att vi ska för varje tal $\epsilon > 0$ finna ett tal ω, som beror på ϵ, så att $x > \omega$ medför att $|e^{-x}| \leq \epsilon$.
Vi ser att $|e^{-x}| = e^{-x}$ och med hjälp av logaritmering att $e^{-x} < \epsilon$ är ekvivalent med $-x < \ln\epsilon$, som i sin tur är ekvivalent med att $x > \ln(1/\epsilon)$.
Vi kan alltså välja $\omega = \ln(1/\epsilon)$.

4. Vi ska bevisa att påståendet
$A(n)$: talet $5^n + 3$ är jämnt delbart med 4 för $n = 0, 1, 2, ...$
är sant.

Induktionsbevis i tre steg ger:
1. $A(0):\ 5^0 + 3 = 4$ är jämnt delbart med 4, sant.

2. Visa att $A(m) \Rightarrow A(m+1)$.
Antag $A(m):\ 5^m + 3 = 4k$ för något helt tal k.
Vi ska visa $A(m+1)$, dvs att $5^{m+1} + 3 = 4k_1$ för något helt tal k_1.
$VL_{m+1} = 5^{m+1} + 3 = 5 \cdot 5^m + 3 = [\text{ Induktionsantagandet}] = 5(4k-3) + 3$
$= 5 \cdot 4k - 12 = 4(5k-3) = 4k_1 = HL_{m+1}$

3. Steg 1 och 2 visar nu att $A(n)$ gäller för $n = 0, 1, 2, \ldots$, enligt induktionsaxiomet.
Alternativt bevis:
Geometrisk summa ger

$$5^n + 3 = 5^n - 1^n + 4 = (5-1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + ... + 5 + 1) + 4 = 4k.$$

Ytterliggare alternativt bevis:
Binomialsatsen visar att $5^n = (1+4)^n = 1 + 4m$, där m är ett heltal. Detta medför att $5^n + 3 = 1 + 4m + 3 = 4(1+m)$, vilket är delbart med 4.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen
$g(x) = 3\ln(3+2x) - 2\ln(1+2x)$ på intervallet $0 \le x \le 2$.
Eftersom g är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall, måste ett största och ett minsta värde existera. Vi har

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{6}{3+2x} - \frac{4}{1+2x} \\ &= \frac{6(1+2x) - 4(3+2x)}{(3+2x)(1+2x)} \\ &= \frac{4x-6}{(3+2x)(1+2x)}. \end{aligned}$$

Vi ser att för $0 \le x < 3/2$ är $g' < 0$, dvs g avtagande, och att för $3/2 < x \le 2$ är $g' > 0$, dvs g växande. Därför är $3/2$ en global minipunkt och $g(3/2) = 3\ln 6 - 2\ln 3 = 3\ln 3 + 3\ln 2 - 2\ln 2 = \ln 3^3 - \ln 2 = \ln(27/2)$ är det minsta värdet.

Största värdet måste antas i någon av ändpunkterna:

$$\begin{aligned} &g(0) = 3\ln 3 - 2\ln 1 = \ln 27, \\ &g(2) = 3\ln 7 - 2\ln 5 = \ln(7^3/5^2) = \ln(343/25) < \ln 20 < \ln 27. \end{aligned}$$

Svar: Största värdet är $g(0) = \ln 27$ och minsta värdet är $g(3/2) = \ln(27/2)$.

6. Bestäm volymen, V, av den rotationskropp som uppstår då ytan definierad av $0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $2 \le x$, roterar omkring x-axeln.
Vi har

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1} \\ &= \pi \int_2^\infty \frac{dx}{(x+1)(x-1)} = \pi \int_2^\infty \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} \right) dx \\ &= (\pi/2) \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1| \Big]_2^\infty = (\pi/2) \left[\ln \frac{|x-1|}{|x+1|} \right]_2^\infty \\ &= (\pi/2) \left(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{|1-1/x|}{|1+1/x|} - \ln \frac{1}{3} \right) = (\pi/2)(\ln 1 - \ln \frac{1}{3}) = \frac{\pi \ln 3}{2}. \end{aligned}$$

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, som uppfyller villkoren $y(0) = y'(0) = 0$
Homogen lösning y_H :
Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ ger dubbelroten $r = 1$ och den homogena lösningen $y_H = (Ax + B)e^x$.

Partikulärlösning y_P:
Karakteristisk rot $r = 1$ och högerled e^{2x} ger ingen resonans. Vi kan alltså ansätta $y = ae^{2x}$ (a konstant) som partikulärlösning.
Insättning ger

$y' = 2ae^{2x}$, $y'' = 4ae^{2x}$ ger $y'' - 2y' + y = (4a - 4a + a)e^{2x} = e^{2x}$ dvs $a = 1$.

Alltså $y_P = e^{2x}$.

Allmänna lösningen blir

$$y = y_H + y_P = (Ax + B)e^x + e^{2x}, \quad y' = (Ax + B + A)e^x + 2e^{2x}.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $B + 1 = 0$, $B = -1$.
Begynnelsevillkoret $y'(0) = 0$ ger $B + A + 2 = A + 1 = 0$, $A = -1$.
Den sökta lösningen är alltså $y = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

8. Antag att sjöns radie är 1 och att orienteraren springer bågvinkel $2x$. Då är hennes simsträcka koordan med längden $2\cos x$, vilket är längsta sidan i den likbenta triangel med två vinklar x och två sidor med längden 1, se figuren. Tiden att först springa och sedan simma blir

$$t(x) = \frac{2x}{\frac{3}{2}} + \frac{2\cos x}{1}.$$

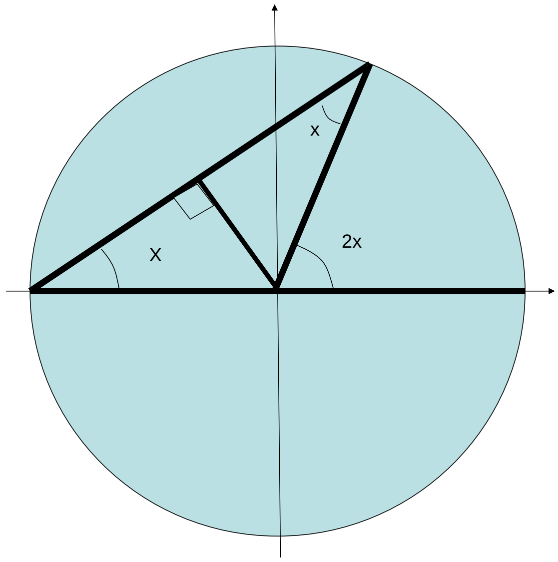
Dess derivata är $t'(x) = \frac{4}{3} - 2\sin x$, som har enda nollställe i $x = \arcsin(2/3)$, eftersom $0 \le x \le \pi/2$. Detta är en inre maxipunkt, eftersom

$$t''\big(\arcsin(2/3)\big) = -\cos\big(\arcsin(2/3)\big) < 0.$$

Funktionen t antar därför sitt minimum i någon av ändpunkterna $x = 0$ eller $x = \pi/2$. Vi ser att

$$t(0) = 2 \text{ och } t(\pi/2) = \frac{2\pi}{3} \text{ och att } 2 < \frac{2\pi}{3}.$$

Därför är det snabbast att bara simma (det långsammaste sättet att ta sig över är att först springa båglängden $2 \arcsin(2/3)$ och sedan simma).



9. Bestäm det värde på $a > 1$ för vilket kurvorna $y = f(x) = a^x$ och $y = g(x) = {}^a\log x$ tangerar varandra i en punkt på linjen $y = x$.
Antag att tangeringen sker i punkten (X, X).
Eftersom kurvorna tangerar varandra i punkten (X, X) gäller $f'(X) = g'(X)$ och eftersom $a > 1$ är de båda funktionerna f och g växande, dvs .$f'(X) = g'(X) > 0$. Dessutom är de varandras inverser, varför $f'(X)g'(X) = 1$ måste gälla. Detta medför att $(f'(X))^2 = 1$ och $f'(X) = 1$.
Vi får två ekvationer
(1) $\quad a^X = X \qquad (f(X) = X)$ och
(2) $\quad a^X \cdot \ln a = 1 \qquad (f'(X) = 1$, $\quad$ notera att $a^x = e^{x \ln a})$.
Ekvationerna (1) och (2) ger: $\qquad X \ln a = 1, \quad \ln a = 1/X, \quad a = e^{1/X}$.
Alltså är $X = a^X = \left(e^{1/X}\right)^X = e^1 = e$ och därmed $a = e^{1/X} = e^{1/e}$.
Svar: $a = e^{1/e}$.

10. Se boken.