Tentamensskrivning

SF1608 (5B1115, 5B1135), Matematik I
SF1654 Webbaserad kurs i envariabelanalys

2009-01-13, kl 14:00-19:00

Skriv namn och födelsenummer på varje blad. Endast en uppgift per blad. För betyg E (godkänt), D, C, B och A, krävs preliminärt 16, 19, 22, 26 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Inga hjälpmedel!

1) Bevisa att

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \qquad \text{(3p)}$$

för alla naturliga tal $n \in \mathbb{N}$.

2) Beräkna

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 3/4} \qquad \text{(3p)}$$

3) Bestäm Taylorutvecklingen av tredje ordningen (kring 0) av

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad \text{(3p)}$$

4) Beräkna

$$\int_1^2 e^{\sqrt{x}} dx \qquad \text{(3p)}$$

5) Bestäm

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4} \qquad \text{(3p)}$$

6) Beräkna längden av kurvan som beskrivs med hjälp av parametriseringen

$$\begin{cases} x(t) &= \sin\left(\frac{2t^2}{\pi}\right) \\ \\ y(t) &= \cos\left(\frac{2t^2}{\pi}\right) \end{cases} , \qquad t \in [0, \pi] \qquad (4p)$$

7) Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'' + 4y' - 5y = e^x + \sin x \qquad (4p)$$

8) Är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ \\ 1 & x = 0 \end{cases} \qquad (4p)$$

differentierbar?

9) Låt en cylinderformad burk ha den totala arean A. Givet A, maximera burkens volym V genom att välja burkens höjd.

(4p)

10) Med hjälp av ansatsen $y(x) = x^a$, bestäm den lösning till differentialekvationen

$$8y + 9x^2y'' = 9xy'$$

som uppfyller

$$y(1) = 1, \qquad \int_1^\infty \frac{y(x)}{x^2}dx < \infty \qquad (4p)$$

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Antingen dubbla summan:

$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n-1)+\ldots+3+1 = 2n+2n+\ldots+2n+2n = n(2n) = 2n^2$

Eller induktion:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$$

bevisar påståendet.

2) Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x+3/4} &= \int_2^3 \Big(\frac{1}{x-3/2}-\frac{1}{x-1/2}\Big)dx = \\ = \ln\Big|\frac{x-3/2}{x-1/2}\Big|\Big|_2^3 &= \ln\Big|\frac{2x-3}{2x-1}\Big|\Big|_2^3 = \ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3} = \ln\frac{9}{5}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\sin x\cdot\cos x &= \Big(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\Big)\cdot\Big(1-\frac{x^2}{2}+\ldots\Big) = \\ &= x - x^3\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\Big)+\ldots = x-\frac{2}{3}x^3+\ldots\end{aligned}$$

Eller:

$$\sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\Big(2x-\frac{(2x)^3}{6}+\ldots\Big) = x-\frac{2}{3}x^3+\ldots$$

4) Variabelsubstitution och därefter partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int_1^2 e^{\sqrt{x}}dx &= \Big\{u=\sqrt{x},\quad du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Big\} = 2\int_1^{\sqrt{2}} e^u u\,du = \\ &= \{partiell\ \ integration\} = 2\left(ue^u\Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} e^u du\right) = \\ &= 2\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} - e - e^{\sqrt{2}} + e\right) = 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5) Insikt (eller polynomdivision) ger

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^3}{(x+2)^2} = \lim_{x\to-2}(x+2) = 0$$

6) Med

$$\dot{x} = \frac{4t}{\pi}\cos\left(\frac{2t^2}{\pi}\right), \qquad \dot{y} = -\frac{4t}{\pi}\sin\left(\frac{2t^2}{\pi}\right)$$

får vi

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi |t|dt = \frac{4t^2}{2\pi}\Big|_0^\pi = 2\pi$$

7) Homogena lösningen:

$$L[y_H] := y_H'' + 4y_H' - 5y_H = 0$$

Ansatsen

$$y_H = e^{\lambda x} \Rightarrow y_H(x) = Ae^x + Be^{-5x}$$

Vi delar upp partikulärlösningen:
$L[y_1] = e^x \Rightarrow$ (resonans!) Ansats: $y_1(x) = Cxe^x \Rightarrow y_1' = Ce^x(1+x), \quad y_1'' = Ce^x(1+x+1)$.

$$Ce^x(2+x+4+4x-5x) = 6Ce^x = e^x \Rightarrow C = \frac{1}{6} \Rightarrow y_1(x) = \frac{x}{6}e^x$$

$L[y_2] = \sin x \Rightarrow$ Ansats: $y_2(x) = D\cos x + E\sin x \Rightarrow y_2' = -D\sin x + E\cos x, \quad y_2'' = -D\cos x - E\sin x$. Dvs

$$\cos x\Big(\underbrace{-D+4E-5D}_{=0}\Big) + \sin x\Big(\underbrace{-E-4D-5E}_{=1}\Big) = \sin x$$

$$\Rightarrow E = \frac{3}{2}D, \quad -6E - 4D = -9D - 4D = -13D = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{13}, \quad E = -\frac{3}{26}$$

$$y(x) = Ae^x + Be^{-5x} + \frac{x}{6}e^x - \frac{1}{13}\cos x - \frac{3}{26}\sin x$$

8) För $x \neq 0$ gäller

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = 0,$$

eftersom nära 0 gäller att

$$\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\frac{1}{x}(x - x^3/6 + \ldots) - 1}{x} = \frac{1 - x^2/6 + \ldots - 1}{x} = -\frac{1}{6}x + \ldots$$

9) $A = 2\cdot(\pi r^2) + (2\pi r)\cdot h, \quad V = (\pi r^2)\cdot h$. För $r \neq 0 \Rightarrow h = \frac{A}{2\pi r} - r \Rightarrow V = \frac{Ar}{2} - \pi r^3 =: V(r)$. Vi vill hitta globalt max till V(r):

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3\pi r^2 = 0, \quad V''(r) = -6\pi r < 0 \quad \forall r > 0$$

Volymen är maximal om $r^2 = \frac{A}{6\pi} = R^2$, dvs om man väljer

$$h = \frac{A}{2\pi R} - R = 2\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \quad \Big(= 2R\Big)$$

10)

$$y = x^a \Rightarrow y' = ax^{a-1} \Rightarrow y'' = a(a-1)x^{a-2}$$

Alltså,

$$8 + 9a(a-1) = 9a \Rightarrow a = 1 \pm \frac{1}{3}$$

så allmänna lösningen blir

$$y(x) = Ax^{2/3} + Bx^{4/3}$$

Om $B \neq 0$ existerar inte $\int_1^\infty \frac{y(x)}{x^2}$, dvs $B = 0$. För $A = 1$ får vi att $y(1) = 1$. Alltså,

$$y(x) = x^{2/3}$$