Lösningar till tentamen i kurs SF1608 (5B1115, 5B1135) Matematik I 100115

1. Vi använder l'Hospitals regel tre gånger (typen är $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos x + x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x - -x\sin x} = \frac{1}{3}\ .$$

2. $f'(x) = e^{-4x} - 4xe^{-4x} = (1-4x)e^{-4x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ som är en kritisk punkt. Ändpunkt är $x = 0$. Singulära punkter saknas. Vi ser att derivatan är positiv mellan $x = 0$ och $x = ¼$ och negativ för större x – värden. Förstaderivatatestet ger då att $x = 0$ är en lokal minpunkt och att $x = ¼$ är en lokal maxpunkt med $f(1/4) = 1/4e$. Då funktionen är kontinuerlig och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ fås värdemängden $\left[0, \frac{1}{4e}\right]$.

3. $$\int \frac{x}{(1-x)^3}dx = \begin{Bmatrix} u = 1-x \\ du = -dx \end{Bmatrix} - \int \frac{1-u}{u^3}du = \int (\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3})du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C = \frac{2x-1}{2(x-1)^2} + C\ .$$

4. Volymen ges av

$$V = \pi\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx = \pi\int_0^\pi x\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi x\cos 2x\,dx) =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2}(\left[x\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2}dx) = \frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{4} v.e.$$

5. $$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+3)^2}dx = \begin{Bmatrix} u = x^2+3 \\ du = 2xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int_3^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_3^R \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_3^R = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}) = \frac{1}{6}\ .$$

6. Homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2 - 2r + 4 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm i\sqrt{3}$. Det ger $y_h(x) = e^x.(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$ Vi ansätter som partikulärlösning:

$y_p(x) = a\cos x + b\sin x \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin x + b\cos x \Rightarrow y_p''(x) = -a\cos x - b\sin x$.

Insättning i differentialkvationen ger:

$(3a-2b)\cos x + (2a+3b)\sin x = 13\sin x \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = 2\cos x + 3\sin x$ och den

allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x(A\cos\sqrt{3}.x + B\sin\sqrt{3}x) + 2\cos x + 3\sin x$.

$y(0) = 0 \Rightarrow A + 2 = 0 \Rightarrow A = -2$ vilket ger

$y(x) = e^x(-2\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x) + 2\cos x + 3\sin x \Rightarrow$

$y'(x) = e^x((B\sqrt{3}-2)\cos\sqrt{3}x + (B+2\sqrt{3})\sin\sqrt{3}x) - 2\sin x + 3\cos x$. $y'(0) = 0$ ger nu

$y'(0) = 0 \Rightarrow B\sqrt{3} + 1 = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Slutligen fås resultatet $y(x) = -e^x(2\cos\sqrt{3}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x) + 2\cos x + 3\sin x$.

7. Tredje gradens Maclaurinpolynom till funktionen e^x är

$p_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$. Eftersom $\dfrac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2}$ ges det sökta närmevärdet av

$p_3(-\dfrac{1}{2}) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{48} = \dfrac{29}{48}$.

8. Låt $f(x) = 4\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} - \ln(x^2+1)$. Vi visar att $f(x) > 0$ för $x > 0$.

$f(0) = 0$. Om vi kan visa att f är växande för $x > 0$ är vi klara.

$f'(x) = \dfrac{4}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{(x+1)^2(x^2+1)}$. Vi ser att detta är positivt för $x > 0$ vilket innebär att f är växande för sådana x – värden.

9. Vi söker längden av kurvbågen. Den ges av $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Enligt integralkalkylens fundamentalsats gäller $y' = \sqrt{\cos^4(x)\sin^2(x) - 1}$ vilket ger $1 + (y')^2 = \cos^4(x)\sin^2(x)$.

Kurvbågens längd är alltså $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin(x)dx = \left[-\dfrac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{3}\ le$. Det tar alltså 1/3 sekund för myran att passera kurvbågen.

10. Låt basen i den rätvinkliga triangeln vara x och den andra kateten vara y. Arean ges då av $A = \dfrac{xy}{2}$ och omkretsen av $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 2$. Detta ger

$\sqrt{x^2+y^2} = 2 - x - y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy \Rightarrow y = 2\dfrac{1-x}{2-x} \Rightarrow$

$A = A(x) = \dfrac{x(1-x)}{2-x} \Rightarrow A'(x) = \dfrac{(1-2x)(2-x) + x(1-x)}{(2-x)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$. $A'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 2 \pm \sqrt{2}$ där det övre tecknet förkastas eftersom omkretsen är 2.

$x = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\dfrac{(1-2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}\ cm^2$.

$$A''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+2)}{(x-2)^4}=\ldots=\frac{4}{(x-2)^3}\Rightarrow A''(2-\sqrt{2})=-\sqrt{2}\,.$$

Det betyder att den funna kritiska punkten ger ett maximum.