Lösningar till tentamen i kurs SF1608 (5B1115, 5B1135) Matematik I 100602

1. Vi utför de två stegen i ett induktionsbevis:

   1. $n = 1$ ger VL = 5 = HL . 2. Induktionsantagandet är $\sum_{k=1}^{n}(4k+1) = n(2n+3)$

   för ett godtyckligt valt n . Vi visar att då gäller:

   $\sum_{k=1}^{n+1}(4k+1) = (n+1)(2(n+1)+3) = (n+1)(2n+5)$:

   $VL = \sum_{k=1}^{n}(4k+1) + 4(n+1) + 1 = n(2n+3) + 4n + 5 = (n+1)(2n+5) = HL$.

   Enligt induktionsprincipen är då påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

2. Gränsvärdet är av typen $\frac{0}{0}$ och upprepad användning av l´Hospitals regel (samma typ fås i bägge stegen) ger $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{3\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{9\cos 3x} = \frac{2}{9}$.

3. De sökta värdena måste antas i kritiska punkter eller i intervallets ändpunkter eftersom singulära punkter saknas. Vi söker kritiska punkter:

   $f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1-x^2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f(-2) = e^2$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 4e^{-1}$, $f(2) = 9e^{-2}$.

   Det betyder att det största värdet är e^2 och det minsta är 0 .

4. $\int_0^1 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2} = \left\{\begin{matrix} u = \sqrt{x}+1 \\ dx = 2(u-1)du \end{matrix}\right\} = 2\int_1^2 \frac{u-1}{u^2}du = 2\int_1^2 (\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2})du = 2\left[\ln|u| + \frac{1}{u}\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1$.

5. Volymen ges av

   $$V = \pi\int_0^2 x^2 e^{-2x}\,dx = \pi(\left[-\frac{x^2e^{-2x}}{2}\right]_0^2 + \int_0^2 xe^{-2x}\,dx) =$$

   $$= \pi(-2e^{-4} + \left[-\frac{xe^{-2x}}{2}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2x}dx) = \pi(-3e^{-4} - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^2) = \frac{\pi}{4}(1 - 13e^{-4}) .$$

6. Det homogena problemets karakteristiska ekv är $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$.

   Det ger den allmänna lösningen till den homogena ekvationen:

   $y_h(x) = A\cos x + B\sin x$.

Vi har "resonans" och ansätter som partikulärlösning

$y_p(x) = ax + b + x(c\cos x + d\sin x) \Rightarrow$

$y_p'(x) = a + c\cos x + d\sin x + x(-c\sin x + d\cos x) \Rightarrow$

$y_p''(x) = 2d\cos x - 2c\sin x - x(c\cos x + d\sin x)$.

Insättning i diffekvationen ger $2d\cos x - 2c\sin x + ax + b = 4x + 10\sin x$.

Detta ger $c = -5$, $d = 0$, $a = 4$, $b = 0 \Rightarrow y_p(x) = 4x - 5x\cos x$ och den allmänna lösningen blir $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x + 4x - 5x\cos x$.

$y'(x) = -A\sin x + B\cos x + 4 - 5\cos x + 5x\sin x$. De givna villkoren ger nu

$\begin{cases} -A + 4\pi + 5\pi = 0 \\ -B + 4 + 5 \qquad = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 9\pi \\ B = 7 \end{cases}$ Den sökta lösningen är alltså

$y(x) = 9\pi\cos x + 7\sin x + 4x - 5x\cos x$.

7. För $0 < x < 1$ får vi

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \{x > 0\} =$$

$$= \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 .$$

f är alltså konstant på intervallet $0 < x < 1$. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna intervallet är f konstant på det slutna intervallet. Konstanten bestäms genom insättning av ett lämpligt värde, tex $x = 1$:

$$f(1) = \arcsin 1 + 2\arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 = \frac{\pi}{2} .$$

8. Serien är positiv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{n+3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ som är en geometrisk serie med kvoten $r = \frac{1}{3}$. Eftersom $|r| < 1$ är den konvergent. Den givna serien är då konvergent enligt majorantprincipen.

9. Integranden är obegränsad vid $x = 0$. Vi delar upp integralen:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} = I_1 + I_2 . \quad 0 \le I_1 \le \left\{ x^2 + \sqrt{x} \ge \sqrt{x} \ \ på\ [0,1] \right\} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Då är I_1 konvergent enligt majorantprincipen för generaliserade integraler.

$$0 \le I_2 \le \left\{ x^2 + \sqrt{x} \ge x^2 \ \ på\ [1,\infty[\right\} \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} (1 - \frac{1}{R}) = 1.$$

Då är I_2 också konvergent och alltså är den givna integralen konvergent.

10. Låt trådens högra fästpunkt vara (a,b). Trådens längd är $\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 1$. Trådens lutning ges av $y' = \sqrt{e^{2x}-1} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$. Vi får då ekvationen $1 = \int_0^a e^x dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - 1 \Rightarrow a = \ln 2$. $y-$koordinaten för trådens högra fästpunkt fås:

$$b = y(a) = y(\ln 2) - y(0) = \int_0^{\ln 2} y'(x)dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{e^{2x}-1} \\ dx = \dfrac{u}{1+u^2}du \end{array} \right\} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}du =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (1 - \frac{1}{1+u^2})du = \left[u - \arctan u\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \arctan\sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Trådens högra fästpunkt har alltså koordinaterna $(\ln 2, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$.