Lösningar till tentamen i kurs SF1608 (5B1115, 5B1135) Matematik I 110113

1. Vi utför de två stegen i ett induktionsbevis:

   1. $n = 1$ ger VL = 2 = HL . 2. Induktionsantagandet är $\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)$ för ett godtyckligt valt n . Vi visar att då gäller:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(3k-1) = (n+1)^2((n+1)+1) = (n+1)^2(n+2):$$

$$VL = \sum_{k=1}^{n} k(3k-1) + (n+1)(3n+2) = n^2(n+1) + (n+1)(3n+2) = (n+1)(n^2+3n+2) = HL\ .$$

   Enligt induktionsprincipen är då påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

2. Vi använder l'Hospitals regel två gånger (typen är $\frac{0}{0}$) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{e^x-x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{e^x} = 1\ .$$

3. Vi använder substitutionsmetoden:

   $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, $x = 0 \to t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \to t = 1$. Detta ger integralen

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2\ .$$

4. Lokala extremvärden kan finnas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. $f'(x) = \dfrac{x^2-3x-(x+1)(2x-3)}{x^2(x-3)^2} = -\dfrac{x^2+2x-3}{x^2(x-3)^2}$. Vi ser att singulära punkter saknas. Kritiska punkter fås ur $x^2+2x-3 = 0 \Rightarrow x = 1,-3$. Det ger att $x = 1$ är kritisk punkt. Ändpunkter är $x = \frac{1}{2}$ och $x = 2$. Teckenstudium av $f'(x)$ ger att tecknet är positivt mellan $x = \frac{1}{2}$ och $x = 1$ och negativt mellan $x = 1$ och 2. Det ger enligt förstaderivatatestet att f har lokala minima i ändpunkterna och lokalt maximum i $x = 1$.

5. $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{R\to\infty}\int_e^{R}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\left\{\begin{matrix} u=\ln x \\ du=\dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right\}=\lim_{R\to\infty}\int_1^{\ln R}\frac{du}{u^2}=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{\ln R}=1-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\ln R}=1$.

6. Vi partialbråksuppdelar integranden: $\dfrac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}=\dfrac{A}{(1+x)}+\dfrac{B}{(1+x)^2}+\dfrac{Cx+D}{1+x^2}$.

Multiplikation med $(1+x)^2(1+x^2)$ och förenkling ger

$(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D=1$. Identifikation ger

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=1\end{cases}\Rightarrow A=B=\frac{1}{2}\ ,\ C=-\frac{1}{2}\ ,\ D=0\ .$$ Integralen kan då skrivas som

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{x}{1+x^2}\right]dx=\frac{1}{2}\left[\ln|1+x|-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+1)=$$
$$=\frac{1}{4}(\ln 2+1)\ .$$

7. Parablernas skärningspunkter fås ur $x^2=8-x^2\Rightarrow x=\pm 2$. Den sökta volymen ges av

$$\pi\int_{-2}^{2}((8-x^2)^2-(x^2)^2)\,dx=32\pi\int_0^2(4-x^2)\,dx=32\pi\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{512}{3}\pi\ .$$

8. Den homogena ekvationens karakteristiska ekvation är $r^2+3r+2=0\Rightarrow r=-2,-1$.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då $y_h(x)=Ae^{-2x}+Be^{-x}$.

Vi har ”resonans” och ansätter därför som partikulärlösning $y_p(x)=x(ax+b)e^{-x}$.

Detta ger

$$y_p{}'(x)=(-ax^2+(2a-b)x+b)e^{-x}\Rightarrow$$
$$y_p{}''(x)=(ax^2+(-4a+b)x++2(a-b))e^{-x}\ .$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förkortning med e^{-x} :

$$ax^2+(b-4a)x+2(a-b)+3(-ax^2+(2a-b)x+b)+2(ax^2+bx)=x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\ 2a+b=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-1\ .$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=Ae^{-2x}+Be^{-x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{-x}\ .$$

9. Vi visar att $f(x) = \ln x - 2\dfrac{x-1}{x+1} > 0$, $x > 1$. Vi ser att $f(1) = 0$. Då räcker det att visa att f är växande för $x > 1$. Vi visar att derivatan är positiv:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \ , \ x > 1 \ .$$

f växer alltså från värdet 0 vid $x = 1$.

10 . f är definierad för $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$. $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 - \dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = 4\dfrac{1-x}{\sqrt{1-4x^2}} > 0$ för $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ dvs f är strängt växande och alltså inverterbar. $D(f^{-1}) = R(f)$.

$f(-\dfrac{1}{2}) = 2\arcsin(-1) + 0 = -\pi$ och $f(\dfrac{1}{2}) = 2\arcsin(1) + 0 = \pi$. Då f är kontinuerlig och växande på intervallet fås att $D(f^{-1}) = R(f) = [-\pi, \pi]$. Allmänt gäller att

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$. $f'(0) = 4 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{4}$.