KTH Matematik
Gunnar Johnsson, Jan Kristoferson Matematik II 2004-2005

**Lösningar till tentamensskrivning, 2005-03-30, 5B1116 och 5B1136, Matematik II för Bio, E, K, ME, Media, I och OPEN**

**1.** Vi finner $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (2x, 4y + \frac{1}{y}, \frac{1}{z}) = (2, 5, \frac{1}{2})$ i punkten (1,1,2). Normering av den givna riktningsvektorn $\overline{u}$ ger enhetsvektorn $\overline{e} = \frac{1}{7}(2, 3, -6)$.

Den sökta riktningsderivatan blir $(\nabla f) \bullet \overline{e} = \frac{1}{7}(2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + \frac{1}{2}(-6))$, vilket ger

**Svar:** $\frac{16}{7}$.

**2.** Sätt $f(x, y, z) = z^2 - xy - 3$. En normalvektor till (tangentplanet till) ytan $f(x, y, z) = 0$ ges av gradientvektorn $\nabla f = (-y, -x, 2z) = (-2, -3, 6)$ i den betraktade punkten. Tangentplanets ekvation blir alltså $(-2) \cdot (x - 3) - 3 \cdot (y - 2) + 6 \cdot (z - 3) = 0 \iff -2x - 3y + 6z - 6 = 0$. Avståndet från punkten (1,2,4) till detta plan blir enligt känd formel

$$\frac{|-2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

vilket ger

**Svar:** $\frac{10}{7}$.

**3.** $4xy + 3y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 7$ ska transformeras till huvudaxelform.

Karakteristiska ekvationen blir $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$,
vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -1$.

I en ny ON-bas får alltså kurvan ekvationen $4x'^2 - y'^2 = 7$. Vi får därmed

**Svar:** Kurvan är en hyperbel med ekvationen $\frac{x'^2}{(\frac{\sqrt{7}}{2})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$ på huvudaxelform.

**4.** Vi finner att funktionaldeterminanten $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ i alla punkter där $\overline{g}(x, y)$ är definierad, speciellt i $(x, y) = (1, 1)$. Alltså har $\overline{g}$ en differentierbar invers i en omgivning av punkten $(1, 1)$. QED

**5.** Stationära punkter ges av systemet $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 24y^2 - 3x = 0 \end{cases}$.

Den första ekvationen ger $y = x^2$.
Insättning i den andra ekvationen ger $24x^4 - 3x = 0 \iff x(x^3 - \frac{1}{8}) = 0$.
En lösning till detta är $x = 0$, vilket ger den stationära punkten (0,0).
Ytterligare en lösning finns, nämligen $x = \frac{1}{2}$, vilket ger den stationära punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 48y$. I punkten (0,0) får dessa derivator värdena $A = 0,\ B = -3,\ C = 0$, som ger $AC - B^2 = -9 < 0$.
I punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ får vi $A = 3,\ B = -3,\ C = 12$, som ger $AC - B^2 = 27 > 0$. Alltså fås

**Svar:** Sadelpunkt i (0,0), lokalt minimum i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

**6.** $z = h(\dfrac{x}{x^2+y^2})$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = h' \cdot \dfrac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = h' \cdot \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = h' \cdot \dfrac{0 - x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = h' \cdot \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$2xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = h'\cdot 2xy \cdot \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + h'\cdot(y^2-x^2)\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$

VSV.

**7.** $G(x,y) = 3xy^2+1$ undersöks på området
$g(x,y) = x^2+2y^2 \le 1$.

Inre punkter:
$G'_x = 3y^2 = 0 \quad , \quad G'_y = 6xy = 0 \quad \Rightarrow y = 0$ är en lösning för godtyckliga $x$.
Inre stationära punkter: $(a,0),\ |a| < 1$.

Randpunkter:
Använd Lagranges metod med bivillkoret
$(*) \qquad g(x,y) = x^2+2y^2 = 1$.

$$\nabla G = \lambda \nabla g \qquad \text{ger} \qquad \begin{array}{ll} (1) & 3y^2 = \lambda 2x \\ (2) & 6xy = \lambda 4y \end{array}$$

(Inga singulära punkter på randen eftersom $\nabla g \neq \bar{0}$ där.)

Man får $4\lambda xy = 6y^3 = 6x^2y, \quad 6y(y^2-x^2) = 0$.
1. $y = 0$, ger i (*) $x^2 = 1, \quad x = \pm 1$. Stationära punkter: $(\pm 1, 0)$.
2. $y^2 = x^2, \quad y = \pm x$ ger i (*) $3x^2 = 1, \quad x = \pm 1/\sqrt{3}$.
Stationära punkter: $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, och $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.
Jämförelse mellan funktionsvärdena för de stationära punkterna ger $(G(a,0) = 1)$ :

**Svar:** $G_{min} = G(-1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1. \quad G_{max} = G(1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1.$

**8.** Gausseliminering ger:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 0 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ a & 1 & 2 & -2a \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ a & 1 & 2 & -2a \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1-a/2 & 2-a^2/2 & -2a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-a/2 & 2-a^2/2 & -2a \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & a/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-a^2/2 & -2a-2(1-a/2) \end{array}\right]$$

Systemmatrisens rad 3 är en 0-rad då $2 - a^2/2 = 0$ dvs då $a^2 = 4, \quad a = \pm 2$.
Högerledet i rad 3 förenklas till $-2-a$.
$a = 2$ ger högerledet $-4 \quad \Rightarrow \quad$ ingen lösning.
$a = -2$ ger högerledet $0 \quad \Rightarrow \quad \infty$ många lösningar.
$a \neq 2$ och $a \neq -2 \quad \Rightarrow \quad$ en unik lösning (determinanten $\neq 0$).
I fallet $a = -2$ :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ger $y = 2, \quad x + 1 - z = 0, \quad z = x + 1$.

(fo

**Svar(8):**

| | | |
|---|---|---|
| $a \neq 2$ och $a \neq -2$ | : | En unik lösning. |
| $a = 2$ | : | Ingen lösning. |
| $a = -2$ | : | $(x, y, z) = (t, 2, t+1)$ |

**9.** $A^T X = A \quad \Leftrightarrow \quad X = (A^T)^{-1} A$ om $A^T$ är inverterbar.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ inverteras m.hj.a. Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^T)^{-1} A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad =$$

**Svar:**

$$\begin{pmatrix} -3 & 13 & -9 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**10.**

Matrisen $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ ska uppfylla

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{vilket ger} \qquad \begin{cases} (1) - (2): & b - c = 0 \\ (3): & b + b = \lambda,\ b = \lambda/2 = c \\ (2): & a = \lambda - 1 - c = -1 + \lambda/2 \end{cases}$$

Alltså (*) $(a, b, c) = (\lambda/2 - 1, \lambda/2, \lambda/2)$.
Dessutom måste gälla $\det(B) = 0$ (eftersom $B$ saknar invers.)

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = b(ac - b) - c(c - ab) = 2abc - b^2 - c^2 = 0,$$

vilket tillsammans med (*) ger:

$2(\lambda/2 - 1)\lambda^2/4 - \lambda^2/4 - \lambda^2/4 = \dfrac{\lambda^2}{4}(\lambda - 2 - 1 - 1) = 0$

$\dfrac{\lambda^2}{4}(\lambda - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda = 0$ eller $\lambda = 4$, vilket ger

**Svar:** $(a, b, c) = (-1, 0, 0)$ (för $\lambda = 0$) eller $(a, b, c) = (1, 2, 2)$ (för $\lambda = 4$).