

KTH Matematik

-Inga hjälpmedel är tillåtna.

-Preliminära betygsgränser är 16, 22 och 30 poäng för betygen 3, 4 resp. 5.

-Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

1. Bestäm riktningsderivatan för funktionen

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + \ln(yz) \text{ i punkten } (1, 1, 2) \text{ i riktningen } \bar{u} = (2, 3, -6). \quad (3\text{p})$$

2. Bestäm avståndet mellan punkten $(1, 2, 4)$ och tangentplanet till ytan $z^2 - xy = 3$ i punkten $(3, 2, 3)$. (3p)

3. Transformera kurvan $4xy + 3y^2 = 7$ till huvudaxelform samt ange kurvans typ. (3p)

4. Visa att funktionen

$$\bar{g}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ \ln(x/y) \end{pmatrix}$$

har en differentierbar invers i en omgivning av punkten $(x, y) = (1, 1)$. (3p)

5. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $F(x, y) = x^3 + 8y^3 - 3xy$ samt ange deras karaktär. (3p)

V.g. vänd!

6. Visa att funktionen z definierad genom

$z(x, y) = h\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$ uppfyller differentialekvationen

$$2xy \frac{\partial z}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ där } h \text{ är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.} \quad (4p)$$

7. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $G(x, y) = 3xy^2 + 1$ på den slutna ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \leq 1$. (4p)

8. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + az &= 0 \\ 2x + 3y + az &= 4 \\ ax + y + 2z &= -2a \end{aligned}$$

Bestäm också samtliga lösningar, då det finns oändligt många lösningar. (4p)

9. Lös matrisekvationen $A^T X = A$, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4p)

10. Vi antar att matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \text{ saknar invers och har egenvektorn } (1, 1, 1).$$

Bestäm under dessa antaganden samtliga möjliga värden på de reella talen a, b och c . (4p)