Lösningar till tentamen i Matematik II den 22/8 2005.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2$;

Cramer: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3$

$\Delta_2 = -2(-1-3) = 8$, $\Delta_3 = 10 \Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{\Delta}}{\Delta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(Gauß-Jordan: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\cdot} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \ldots \Uparrow$)

2. $f(x,y,z) = \ln(1 + xz + x^2y^3)$

$\operatorname{grad} f = (f_x, f_y, f_z) = \dfrac{(z + 2xy^3,\ 3x^2y^2,\ x)}{1 + xz + x^2y^3}$

$\operatorname{grad} f(1,1,0) = \frac{1}{2}(2, 3, 1)$

Den givna riktningen är $\bar{v} = (2,3,2) - (1,1,0) =$

$= (1, 2, 2)$. Normerad: $\bar{e} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$

Den sökta riktningsderivatan:

$f'_{\bar{v}}(1,1,0) = \bar{e} \cdot \operatorname{grad} f(1,1,0) = \frac{1}{3}(1,2,2) \cdot \frac{1}{2}(2,3,1)$

$= \frac{1}{4}(2 + 6 + 2) = \underline{\frac{5}{2}}$

3) $\vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} 2x+y-7 \\ 2y+x-5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=3,\ y=1$

$H_0 = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det H_0 = 3 > 0$

$\quad \mathrm{Sp}\, H_0 = 4 > 0$

$\Rightarrow \vec{x}_0 = (3,1)$ är en Minimpunkt ; $u(\vec{x}_0) = 0$

4. Tangentplanet till ytan

$G(x,y,z) = 4x^2 + y^3 + yz - 6 = 0$ i punkten

$\bar{a} = (1,1,1)$ är $\bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{a}) = 0$, där

$\bar{n} = \operatorname{grad} G(1,1,1)$.

$\operatorname{grad} G = (8x,\ 3y^2+z,\ y)$

$\operatorname{grad} G(1,1,1) = (8,\ 4,\ 1) = \bar{n}$

Avståndet mellan origo och planet är =

längden av projektionen av $\bar{a}$ på $\bar{n}$,

dvs. $d = \left| \bar{a} \cdot \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \left| (1,1,1) \cdot \frac{1}{9}(8,4,1) \right| =$

$= \left| \frac{1}{9}(8+4+1) \right| = \underline{\underline{\frac{13}{9}}}$

5

$$u(x,y) = g(x/y^2) = g(xy^{-2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g' \cdot \frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g' \cdot \frac{(-2)x}{y^3}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = g' \cdot \frac{2x}{y^2} + g'\frac{(-2x)}{y^2} = 0$$

för alla x och för $y \neq 0$. VSV.

6. Volymen V av en tetraeder som spänns upp av sidvektorerna $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$:

$V = |k\,\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})|$ $\quad$ ($k=\frac{1}{6}$, vilket dock ej behövs här)

För de tre givna tetraedrarna gäller

$\bar{u} = \overrightarrow{AB} = (0,1,0)-(1,0,0) = (-1,1,0)$

$\bar{v} = \overrightarrow{AC} = (0,0,1)-(1,0,0) = (-1,0,1)$

För ABCD: $\bar{w}_1 = \overrightarrow{AD} = (1,3,3)-(1,0,0) = (0,3,3)$

p.s.s. för ABCE: $\bar{w}_2 = \overrightarrow{AE} = (2,2,2)-(1,0,0) = (1,2,2)$

för ABCF: $\bar{w}_3 = \overrightarrow{AF} = (1,0,7)-(1,0,0) = (0,0,7)$

Vi jämför $|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}_i)|$ för resp. tetraeder

och får: $V(ABCD) = k\cdot\text{abs}\begin{vmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&3&3\end{vmatrix} = k((-1)(-3)-1(-3)) = 6k$

$V(ABCE) = k\cdot\text{abs}\begin{vmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\1&2&2\end{vmatrix} = k((-1)(-2)-1\cdot(-2-1)) = 5k$

$V(ABCF) = k\cdot\text{abs}\begin{vmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&0&7\end{vmatrix} = k(0+0+7\cdot 1) = 7k.$

Svar: ABCF har störst volym.

7) $\begin{pmatrix}7&7&7\\7&7&7\\7&7&7\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = A$; $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 21\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A\vec{x} = 0$ om $x+y+z=0$

$\Rightarrow \vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ och $\vec{m}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ (t.ex.)

$\left(|A-\lambda\mathbb{1}| = \ldots = -\lambda^2(\lambda-21) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = 21,\ \lambda_2 = 0 = \lambda_3\right)$

8) Cirkeln Γ : $x^2+y^2-6x-2y+6$

$$= (x-3)^2+(y-1)^2-4 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ lättast att bestämma största och minsta värdet av funktionen $f(u,w) := u^2+w^2+uw \; (= V(x,y))$

på cirkeln $\quad u^2+w^2=4 \quad \begin{pmatrix} u := x-3 \\ w := y-1 \end{pmatrix}$;

parametrisering av Γ: $u = 2\cos\varphi$, $w = 2\sin\varphi$.

$$f(u,w) = 4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi) = 4\left(1+\tfrac{1}{2}\sin(2\varphi)\right) = \tilde{f}(\varphi)$$

är störst om $2\varphi = \pi/2$ eller $5\pi/2$

$$\left(f_{MAX} = 4\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = 6 = V_{MAX}\right)$$

och minst om $2\varphi = 3\pi/2$ eller $7\pi/2$

$$\left(f_{MIN} = 4\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = 2 = V_{Min}\right).$$

Alternativt, Lagrange's metod:

$$F(x,y,\lambda) := V(x,y) - \lambda\left(x^2+y^2-6x-2y+6\right)$$

$$\nabla F \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_{MAX}=6, \; V_{Min}=2$$

9) $10x^2 + 8xy + 4y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$

$\left(\Leftrightarrow 5x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x + 4y + 2 = 0 \ ! \right)$

$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = R \Lambda R^{-1}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

$\Big(\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 12$

$(A - \lambda_1)\vec{x}_1 = 0 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{x}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_2)\vec{x}_2 = 0 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_2 \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big)$

$\vec{x}^T A \vec{x} + (8,8)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4$

$= (\vec{x}^T R) \Lambda \underbrace{(R^{-1}\vec{x})}_{=: \vec{x}'} + (8,8) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 4$

$= 2x'^2 + 12y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(-8x' + 24y') + 4$

$= 2\left\{ x'^2 + 6y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(-4x' + 12y') + 2 \right\}$

$= 2\left\{ \left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 6\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{6}{5} + 2 \right\}$

$= 2\left\{ \left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \right\} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow x' = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}$: en <u>punkt</u> $\left(\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

10) $CK - KC$

$$= (K^2 + L^2 + M^2)K - K(K^2 + L^2 + M^2)$$

$$= \underbrace{K^2 \cdot K - K \cdot K^2}_{=0\ (a)} + \underbrace{(L^2K - KL^2) + (M^2K - KM^2)}_{=0\ (b)}$$

eftersom

$$L^2K = L(LK) \overset{*}{=} L(KL - M) = (LK)L - LM$$
$$= (KL - M)L - LM = KL^2 - (ML + LM)$$

$$M^2K = M(MK) \overset{**}{=} M(KM + L) = (MK)M + ML$$
$$= (KM + L)M + ML = KM^2 + (LM + ML)$$

$(*)$ $KL - LK = M$ $(\Leftrightarrow LK = KL - M)$

och

$(**)$ $MK - KM = L$ $(\Leftrightarrow MK = KM + L)$

behövs (men $LM - ML \overset{(\sim)}{=} K$ behövs inte för att visa $CK = KC$; $(\sim)$ behövs så att $CL = LC$, $CM = MC$)