

**Tentamensskrivning i Matematik II, 5B1116 för Bio, E, K, ME
och Media samt 5B1136 för I och OPEN den 22 augusti 2005.**

-Inga hjälpmedel är tillåtna.

-Preliminära betygsgränser är 16, 22 och 30 poäng för betygen 3, 4 resp. 5.

-Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.

1. Lös ekvationssystemet

$$x + y - z = 2$$

$$x - 2y + z = 0.$$

$$3x - y - z = 0$$

(3p)

2. Bestäm riktningsderivatan för funktionen

$f(x, y, z) = \ln(1 + xz + x^2y^3)$ i punkten $(1, 1, 0)$ i riktningen från $(1, 1, 0)$ till $(2, 3, 2)$.

(3p)

3. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$u(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 7x - 5y + 13$ samt ange deras karaktär. (3p)

4. Bestäm avståndet mellan origo och tangentplanet till ytan

$4x^2 + y^3 + yz = 6$ i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

5. Visa att funktionen $U(x, y) = g(x/y^2)$ uppfyller den partiella differentialekvationen $2x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ i området $y > 0$. Funktionen g antas varas deriverbar. (3p)

V.g. vänd!

6. Betrakta punkterna $A : (1, 0, 0)$, $B : (0, 1, 0)$, $C : (0, 0, 1)$, $D : (1, 3, 3)$, $E : (2, 2, 2)$ och $F : (1, 0, 7)$.
Avgör vilken av tetraederna $ABCD$, $ABCE$ och $ABCF$ som har störst volym. (4p)

7. Bestäm tre ortonormerade egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

(4p)

8. Bestäm största och minsta värdet av funktionen
 $V(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (x - 3)(y - 1)$ på cirkeln
 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$. (4p)

9. Transformera ekvationen $10x^2 + 8xy + 4y^2 + 8x + 8y + 4 = 0$ till huvudaxelform. Vad svarar ekvationen mot geometriskt? (4p)

10. Låt K, L och M vara tre $n \times n$ -matriser som uppfyller ekvationerna

$$KL - LK = M$$

$$LM - ML = K.$$

$$MK - KM = L$$

Definiera $C = K^2 + L^2 + M^2$.

a. Visa att $CK - KC = (L^2 + M^2)K - K(L^2 + M^2)$. (1p)

b. Visa att $CK = KC$. (3p)

Anm: Det gäller också (vilket inte behöver visas) att
 $CL = LC$ och $CM = MC$.